Working Papers in Philosophy
Szerkesztő: Kovács Gábor
2018/2

A matematikai és a metafizikai végtelen Georg Cantornál, Ludwig Wittgensteinnél és Tengelyi Lászlónál, és a matematikai végtelen „valódi paradoxona”

Székely László

MTA BTK

Institute of Philosophy
Research Centre for the Humanities
Hungarian Academy of Sciences

A szerzőről

Székely László (1954) matematikus, filozófus, kozmológus-csillagász; az *Einstein kozmoszától a fölfúvódó világegyetemig* (Bp: 1990) és *Az emberarcú kozmosz: az antropikus elv* (Bp: 1997) című monográfiák szerzője, az *Einstein válogatott írásai* (2005) kötet szerkesztője, a *Kopernikuszi fordulat fél évezred távlatában* (2017) és az *Észlelés és fantázia: válogatás Palágyi Menyhért írásaiból* (2017) című kötet társszerkesztője; az MTA BTK Filozófiai Intézetének senior főmunkatársa. Munkásságában nagy hangsúlyt fektet mind a résztudományok eredményeit túlértékelő, a filozófiát a résztudományokra hivatkozva ignorálni szándékozó szcientizmus, mind a résztudományokba spekulatív módon beavatkozni kívánó filozófiai törekvések kritikájára. További írásaiból: "A világ "világtalanításának" stációja: Albert Einstein relativitáselmélete a létre vonatkozó heideggeri kérdés kontextusában. *Világosság* 43. (2002/10-12); „Tudományfilozófia versus kultúrfilozófia: az európai tudománytörténet Oswald Spengler filozófiájának perspektívájában.” *Világosság* 50. (2009/4); “Szcientizmus és anti-szcientizmus a tudományfilozófiában” (In: Nyíri-Palló: *Túl az iskolafilozófián*, 2005); „A fizikai megismerés határairól és határtalanságáról: A Higgs-bozon és a fizika »végső elmélet«-e.”(*Pannonhalmi Szemle* 2013); „Csillagsors: A csillagvilág kövője az újkori természetfilozófiában és a modern asztrofizikában (*Pannonhalmi Szemle*, 2016); „Az információtechnológiai forradalom és a virtualitás Teilhard de Chardin kozmológiájának kontextusában.” (*Magyar Tudomány*, 2017); „A matematikai végtelen cantori fogalma Ludwig Wittgensteinnél és Tengelyi Lászlónál” In: Marosán Bence (szerk.): *Élettörténet, sorsesemény, önazonosság. Tanulmányok Tengelyi László emlékére.* Budapest: 2019 (megjelenés alatt).

Abstract

László Székely: The notions of mathematical and metaphysical infinity in the theories of Georg Cantor, Ludwig Wittgenstein and László Tengelyi

Whereas Wittgenstein’s criticism of Cantor’s concept of mathematical infinity was motivated by his anti-metaphysical philosophical attitude, his arguments are valid independently of his philosophical commitment: in mathematics we indeed face only endlessness, limitlessness and no actual quantitative infinity. However, in contrast to the extreme finitist point of view, this does not mean that mathematical set theory is philosophically incorrect. What must be reformed for its correct presentation is only the verbal narrative attached to the genuine mathematical theory: it is enough to eliminate the words „transfinite” and „infinite” and replace them […]

[…] with the qualitative determination „unlimited" or "boundless" and the concept of mathematical limit.

In his monograph *Welt und Unendlichkeit* László Tengely aims at a phenomenological metaphysics „without ontotheology". As a part of his project, he analyses Cantor's theory of transfinite sets and concludes that these mathematical constructions are inappropriate to be mathematical prototypes or counterparts of the phenomenological concept of the infinity, which means the openness of the things inside the world. However, he does not take into consideration Wittgenstein's criticism of the Cantorian concept of infinity and does not recognize that in the presentation of set theory Cantor merges pure mathematics with its Platonist interpretation. Despite this failure, Tengelyi's reference to Cusanus' concept of symbolization of the Absolute with the help of mathematics is illuminative: It makes clear that in contrast with Tengelyi's conclusion the non-platonically interpreted mathematical infinity, that is, infinity as limitlessness may be interpreted as symbol of the phenomenological openness, while the platonically interpreted mathematical infinity symbolizes the Absolute of ontotheology.

But at this point, denying actual quantitative infinity and accepting only limitlessness and openness, a disturbing question arises: from where comes this openness? .Although working in different philosophical frameworks, both Wittgenstein and Tengelyi reject this question. Nevertheless, even if one agrees with Wittgenstein that there is no quantitative infinity but only endlessness, it is hard to eliminate the intuitive idea of the former. *It seems that this idea unavoidably haunts when one deals with unlimited mathematical objects* (such as e.g. the series of natural numbers or the set of the real ones). According to Wittgenstein this intuitive idea is generated by the misuse of language: language enchants us. But is it really an explanation? It is not equally or more rational to assume that this openness is not the ultimate fact but it is directed out of the world, toward a transcendent sphere, the source of the world's openness? The Cantorian mathematics (even in its Wittgensteinian interpretation) as well as the poetry of János Pilinszky, his and the excellent late musician Zoltán Kocsis' witness about Bach's music, the oeuvres of Bach and the other great composers: all this invokes the intuitive felling of the transcendence and through this feeling orients us toward a metaphysics with ontotheology. Whether a program of a phenomenological metaphysics might ignore these phenomena?

Székely László: ***A matematikai és a metafizikai végtelen Georg Cantornál, Ludwig Wittgensteinnél és Tengelyi Lászlónál, és a matematikai végtelen „valódi paradoxona”***

Tengelyi László (1954-2014)

1. Bevezetés: a filozófiai problémák jellegéről és a filozófia műveléséről

Leszek Kolakowski ***Metafizikai horror*** című művében arról ír, hogy természetes törekvésünk az idegen nyelvezetnek számunkra ismerős dialektikusba történő átfordítása. Ám egyúttal fölhívja a figyelmet ennek filozófiai veszélyére is. Heidegger alábbi szavait olvassa: „az ittlét ígyléte a gond” – fejtegeti Kolakowski – az analitikus filozófus hajlamos arra gondolni, hogy a német filozófus e szavakkal azt szeretné kifejezni, hogy az emberek gyakran aggódnak különböző dolgok miatt. Ám az ilyen saját dialektusban való olvasat nem megnyitja, hanem elzárja a megértés útját: amennyiben ugyanis „némi ismeretségbe kerülünk az új nyelvvel" – folytatja Kolakowski – „valószínűleg arra a belátásra jutunk, hogy a legjobb módja annak elmondására, amit itt Heidegger mondani törekszik, az, ahogyan ő ezt teszi." (Kolakowski, L.: Metafizikai horror. Budapest: Osiris, 1988.) Ez a figyelmeztetés a valódi filozófiai problémák megfogalmazhatóságának, kifejezhetőségének nehézségére utal – bizonyos értelemben arra, amivel mindvégig küszködve Wittgenstein radikális megoldásként az ilyen problémák hamis, illetve nem létező, illuzórikus volta mellett érvel.

A kiváló magyar filozófiatörténész, filozófus és egyetemi tanár, Munkácsy Gyula (Tengelyi László egyik mestere) olvasatában a *Sein und Zeit* Heideggere ott folytatja, ahol Wittgenstein a Tractatus-ban kiteszi a pontot a „hallgatni kell" után: tudja ugyan, hogy olyan dolgokról fog beszélni, melyet képtelen megragadni a hagyományos nyelvvel, és ezen utóbbi normái szerint megméretve szövege abszurd lesz, de ezt tudatosan vállalja. S tulajdonképpen mi más a filozófia értelme, mint töprengeni és beszélni arról, amiről tudjuk: nem lehet beszélni (legalábbis a wittgensteini értelemben). A wittgensteini végtelenkritika reprodukciójától eltekintve a most következő kérdésfölvetések és válaszkísérletek Wittgenstein filozófiája értelmében értelmetlenek lesznek: olyanok, amelyek elrettentő példával szolgálnak arra, ami ellen ő küzd: a nyelv általi megbabonázottságunkra. (V. ö.: Ludwig Wittgenstein: *Philosophische Untersuchungen* §109. Pl. in:Wittgenstein, Ludwig *Tractatus Logico-philosophicus. Tagebücher 1914-1916. Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1960: 342. o..)

De vajon nem éppen ezért érdemes foglalkozni velük?

Georg Cantor (1845-1918)

2. Számlálás, számosság és a matematikai végtelen cantori fogalma

Ha meg akarjuk érteni azt a matematikai újítást – mondhatjuk forradalmat –, amelyet Cantor hozott a matematikában, akkor elsőként a Cantor előtti matematikának a mennyiségi végtelenhez való viszonyát kell érintenünk. Az arisztotelészi utáni európai gondolkodástörténetet egészen Cantorig gyakran jellemzik úgy, hogy az mindvégig elutasította a valóságos, tényleges, azaz „aktuális" végtelent, és csak a lehetőség szerinti, „potenciális" végtelent ismerte el. Ez azonban – mint amiképpen erre Tengelyi László joggal hívja föl a figyelmet[1] – tévedés: a középkori gondolkodás kezdeteitől egészen a XIX. századig általánosan elfogadott volt Istennek, mint a világ teremtőjének és korlátok nélküli abszolút irányítójának föltétlen és valóságos végtelensége. Mi több, ez a fogalom egészen Platónig vezethető vissza, akinél a legfőbb jó ideája „végtelenül" tökéletes, s mint ilyen, tökéletességében az aktuális végtelen hordozója. S bár a keresztény teológia ennél jóval átfogóbb és mélyrehatóbb végtelenséget tulajdonít Istennek, végtelenségfogalmának előképe mégiscsak az abszolút jó platóni képzete.

[1] WU 475-476. A témával kapcsolatosan vesd össze még: Clayton 1996, és Neidhart2007.

A végtelenségnek e most érintett típusát minőségi, intenzív végtelenségként jellemezhetjük, és ennek jegyében az előző bekezdés elején tévesnek minősített gondolkodástörténeti állítást úgy korrigálhatjuk, hogy amíg az európai gondolkodásban a középkor kezdeteitől egészen mindmáig helye volt és van a minőségi aktuális végtelennek, a mennyiségi végtelennek – talán Cusanust kivéve – csupán mint lehetőség szerinti, „potenciális" végtelennek jutott hely.

A mennyiségi végtelen, mint aktuális és matematikai végtelen, határozott formában elsőként az újkori tudományok kezdetén, a Newton- és Leibniz-féle differenciál- és integrálszámításban jelent meg a végtelenül kicsiny mennyiségek formájában. Ez a newtoni és leibnizi elmélet hihetetlenül hatékonynak bizonyult a fizikában, és nélküle a mai tudomány kialakulása elképzelhetetlen lett volna. Ám a kor a végtelen kicsiny mennyiségek fogalmának e matematikán belüli megjelenését mégis elfogadhatatlannak tekintette, és a matematika fejődésének egyik ösztönzője ebben az időszakban éppen az a szándék volt, hogy e „végtelen kicsiny"-t oly módon tüntessék el a matematikából, hogy ugyanakkor a Newton- és Leibniz-féle differenciál- és integrálszámítás korrigált – a végtelen kicsinyt már nem tartalmazó – változata érvényben maradhasson. Ezt a programot azután számos matematikus fáradozását követően a határátmenet és a határérték fogalmának megalkotásával a francia matematikusnak, Augustus-Lion Cauchynak sikerült teljesítenie, majd – mintegy jelezve a német matematikának a franciával párhuzamos előretörését – e tekintetben Bernhard Riemann a kétoldalú megközelítések módszerével ugyancsak sikeresnek bizonyult. A XIX. század második felét így egy olyan korszakként jellemezhetjük, amikorra a differenciál- és integrálszámítás megőrzésével és továbbfejlesztésével egyidejűleg sikerült eltüntetni a végtelen kicsiny fogalmát a matematikából.

Tekintettel arra, hogy a Newton-Leibniz-féle integrálszámítás sikeres volt, nem annak használhatatlan volta motiválta a végtelen kicsiny eltüntetésére irányuló törekvést. Az ok egyik oldalról az a már jelzett matematikán kívüli meggyőződés volt, mely a végtelen kicsinyt filozófiailag tarthatatlan és ezért a matematikából kizárandó fogalomnak tekintette. Ezt a meggyőzősét erősítette meg azután másik oldalról az a tény, hogy Newton és Leibniz elméletét e fogalmat megőrizve nem sikerült matematikailag teljesen egzakttá tenni. E két tényező közül az utóbbi nyilván a matematika tudományán belüli, mely mint ilyen a matematika belügyét képezi. Az előbbi viszont ***prematematikai***ként jellemezhető, mivel megelőzi a matematikát, s azt szabályozza, hogy milyen matematikát szabad alkotni.

Mármost azzal a prematematikai meggyőződéssel, hogy a végtelen kicsinynek nincs helye a matematikában, maga Cantor is egyetértett.[2] Ám másik oldalon, a végtelen nagy mennyiség fogalmát éppen ö emelte be a tudományba, szembefordulva ezzel kora matematikusaival, akik a kor szellemét átható prematematikai meggyőződés jegyében a „végtelen nagy” fogalmát ugyanúgy elfogadhatatlannak tekintették, mint a végtelen kicsiny képzetét.

Cantort természetesen nem filozófusi elmélkedések vezették el újításhoz: kora konkrét matematikai problémáinak megoldásával foglalkozott, és ennek során jutott el a halmaz – csupán intuitív – matematikai fogalmához, és a halmazokra vonatkozó elméleten belül a végtelen számosságú halmazokig. Mert a cantori újítást elsődlegesen nem a végtelen számosságok bevezetése képezi, hanem a „halmaz” fogalma, és ennek csupán járuléka – persze kulcsfontosságú járuléka – a halmazok számosságának, és a végtelen számosságú halmazoknak megjelenése.[3]

A végtelen számosság fogalmának megvilágítása érdekében tekintsünk olyan egyedi, elkülöníthető elemekből álló sokaságokat, amilyenekkel a mindennapi élet során találkozhatunk: egy liget tölgyfáinak összességét, egy nőstényoroszlán éppen megszült kölykeit vagy egy kosár almát. Ezek a világ valós sokaságai, amelyeknek elemei jól meghatározott mennyiséggel bírnak. Viszont az is nyilvánvaló, hogy e mennyiségek nem számok: ezek az utóbbiak csupán emberi fogalmak, emberi konstrukciók, amelyek arra szolgálnak, hogy segítségükkel megragadjuk e valóságos véges sokaságok elemeinek mennyiségét. Mivel e mennyiségeket az általunk létrehozott természetes számokkal írjuk le, egy-egy összesség elemeinek a számáról beszélünk: „a tisztáson álló tölgyfák száma negyvenkettő”, „az oroszlán kölykeinek száma négy”. Ám a kevésbé fejlett kultúrák egy részében csak bizonyos mennyiségig vannak számszerű meghatározások, míg ezen fölül már csak olyan kifejezésekkel rendelkeznek, mint pl. „ötnél több”, „sok”, „nagyon sok” stb. Ennek pedig ezért van jelentősége, mert bár úgy szoktunk a sokaságok elembeli nagyságáról beszélni, hogy pl. „a kosárban lévő almák *száma huszonöt*, „az oroszlán kölykeinek *száma*

[2] V. ö. pl. Bell 2006.

[3] Cantornak e témával foglalkozó matematikai tanulmányait lásd a *Gesammalte Schriften* kötet III. részében, az „Abhandunglen zur Mengentheorie” alcím alatt. Vö: Cantor 1932: 115-356. Cantor életének és munkásságának ma már klasszikusnak tekinthető áttekintése:Fraenkel 1932. A cantori elméletnek történetileg hű, de a mai standard matematikának is megfelelő kifejtését lásd: Deiser 2002., Hallett 1984, illetve Fraenkel – Bar-Hiller 1958. Cantor elméletét, a végtelennel kapcsolatosa koncepciójának kialakulását ugyancsak tárgyalja:Tapp 2005. Magyarul kivonatok Cantornak a matematikai végtelenről szóló elméletéből: Cantor 1988.

négy”, és az ilyen kijelentéseket objektív kijelentésnek tekintjük, *azok már magukban foglalják az ember által megkonstruált számfogalmat.*

Fejlett számfogalommal rendelkező kultúrákban a sokaságok elemeinek „számát” úgy határozzuk meg, hogy az elemeket megszámláljuk. Könnyű belátni, hogy ebben az értelemben nem beszélhetünk olyan sokaságok „számának” meghatározásáról, amelyek végtelen sok elemet tartalmaznak, hiszen egy ilyen sokaság elemeit akkor sem tudnánk végigszámlálni, ha örökkévaló életünk volna: ekkor sem juthatnánk sohasem a végére, hiszen ekkor életünknek sem volna sohasem vége: ***a véges sokaság, legyen az bármily nagy is, egy örökéletű lény által mindig megszámlálható lesz, ám a végtelen sohasem.*** Annak okát tehát, hogy a matematikai mennyiségi végtelent az európai gondolkodás sokáig csak mint lehetőség szerinti végtelent ismerte el, és tagadta valóságosságát, nem egyszerűen Arisztotelész tekintélyében kell keresnünk. Éppen megfordítva: Arisztotelész koncepciója többek között a számlálás mindennapi élményén nyugodott, és más tényezők mellett éppen ez a mindennapi élmény hitelesítette azt. A végtelen „végigszámlálásának” lehetetlensége volt az elsődleges tényező abban, hogy egészen Cantorig a mennyiségi végtelen megmaradt formátlan, meghatározatlan, csak lehetőség szerint létező mennyiségnek, s ezért nem lehetett helye a matematikában.

Az előbbi példákban említett, elkülöníthető elemekből álló sokaságokra Cantor bevezette a halmaz fogalmát, a halmazokhoz pedig az azok által tartalmazott elemek mennyiségi mértékekét hozzárendelte relatív számosságuknak – azaz elemeik „kardinális számának” – fogalmát. Eszerint két halmaz egymáshoz viszonyítva akkor és csak akkor azonos számosságú, ha elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak, míg egy adott halmaz számossága akkor kisebb egy másik halmaz számosságánál, ha nem lehetséges közöttük ilyen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, de az első halmaz elemei kölcsönösen egyértelműen leképezhetőek a második halmaz valamely részhalmazára. Könnyű belátni, hogy *e cantori fogalom nem abszolút, hanem csupán relatív fogalom: nem egy halmaz önálló, „magában való” számosságát, hanem csupán két különböző halmaz számosságának viszonyát határozza meg*. Relatív ez a fogalom, hiszen csak halmazok egymáshoz való viszonyában értelmezhető, miközben például egy katonai századra és ezredre tekintve minden számlálás nélkül – mondjuk így: abszolút módon – látjuk a mennyiségi különbséget. A számosság e cantori fogalma azonban relativitása ellenére a végesek esetében ekvivalens az ilyen számlálás nélkül élményekkel (pl. a cantori fogalommal is azt fogjuk kapni, hogy az ezred „nagyobb”, mint a század). Továbbá a kulcsfogalmát képező „kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés" pontosan megfelel annak a műveletnek, amit számláláskor végzünk. Konkrétan: ha például megszámláljuk egy almáskosár almáit, a cantori fogalom értelmében nem teszünk mást, mint kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük egymásnak a természetes számok sorozatának elejét az almaszemeknek, s ha például 25-nél fogynak el az almák, akkor a cantori fogalmat használva éppen azt állapítjuk meg, hogy az első 25 természetes szám halmazának „számosság"-a az almáskosárban lévő almaszemek „számosság"-ával azonos.

Így a véges elemű halmazok esetében a cantori „számosság" értéke azonos a hagyományos számlálás által adódó mennyiséggel: ez még az elképzelhetetlenül nagy véges számok esetében is így van, mert mindig elképzelhetünk egy olyan lényt, mely sokáig él, és végigszámolja a halmaz elemeit. A cantori számosság relatív meghatározása azonban *a végtelennek tekintett matematikai halmazok esetében újat* hozott. Ugyanis nyilvánvaló, hogy például az összes természetes szám nem számlálható végig (mint láttuk, azok „mennyisége" elsősorban éppen ezért maradt meg amorf, meghatározhatatlan, potenciális mennyiségi végtelenként). A cantori számosság megállapítása viszont nem minden esetben előföltételezi a halmaz elemeinek végigszámolását, azaz e cantori fogalmat használva egy új módszert kapunk a halmazok elemeinek mennyiségi meghatározása: elég csupán egy kölcsönösen egyértelmű leképezést definiáló formulát találnunk. Vegyük például az 1.000.001-nél kisebb páros természetes számok halmazát. Ha az 1-hez a 2-őt, a 2-höz a 4-et, és a n<500.001-hez a 2n-t rendeljük, könnyű belátni, hogy ily módon az első 500.000 természetes szám halmazának és 1.000.001-nél kisebb természetes páros számok halmazának kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendeléséhez jutunk, és ezért számlálás nélkül is megállapítható, hogy e két halmaz számossága a cantori értelemben azonos, ami hagyományos megfogalmazásban azt jelenti, hogy az 1.000.001-nél kisebb természetes páros számokat tartalmazó halmaz elemeinek „száma" ötszázezer. De ilyen kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az is, ha például minden természetes számhoz hozzárendeljük annak kétszeresét, hiszen ilyenkor minden természetes számhoz egy és csak egy jól meghatározott páros szám rendelődik: pl. az „n"-hez a „2n", és megfordítva, minden „2i" alakú páros számhoz egy és csak egy természetes szám, az „i". Ez az utóbbi példa azonban mégiscsak erősen különbözik az előző, véges esettől: a véges esetben fele annyit páros számot találunk az ezeregynél kisebb természetes számok között, mint ahány ilyen természetes szám van, míg az utóbbi példában annak a halmaznak a számossága, amelyhez a természetes számok halmazának megfelezésével jutunk, ***a cantori definíció szerint*** azonos lesz az eredeti, „megfelezett" halmaz számosságával. S mivel a számosság a végesben azonos az elemek számával, ennek nyomán könnyen abban a kísértésbe esünk, hogy a következőképpen fogalmazzunk: a páros természetes számok „száma” ugyanannyi mint a természetes számok „száma”. Ez azonban fogalmi csúsztatás, amelyet a népszerűsítő irodalom ki is használni, hogy így a természetes számok és az azok megfelezésével kapott páros számok halmazának „ugyanakkora” vagy „azonos elemszámú” voltának paradoxonához jusson, és azt szenzációként tálalhassa.

Ez a most jelzett fogalmi csúsztatás abból fakad, hogy az „elemek száma” kifejezés a hagyományos számláláshoz kapcsolódik, míg a cantori számosság esetében mesterséges definícióról van szó, mely a végesben való értékegyenlőség ellenére fogalmilag nem azonos sem „az elemek számá”-val, sem a hétköznapi értelemben vett „ugyanannyi”-val. ***Az a tény ugyanis, hogy véges halmazok esetében e kettő érték – tehát a „számosság” értéke és az „ugyanannyi” vagy „az elemek száma” – számszerűleg egybeesik, semmiképpen sem jogosít föl arra, hogy a végtelen számosságú halmazok számossága kapcsán is hagyományos értelemben az „elemek számá”-ról beszéljünk.*** A matematikai végtelennel kapcsolatos, az olvasókat elbűvölni szándékozó népszerűsítő irodalom viszont tudatosan vagy tudatlanul éppen ezt a csúsztatást követi el: a végtelen halmazok cantori értelemben vett azonos számosságát a mindennapi életben használatos „ugyanannyi”-val azonosítja.

A n --- 2n leképezési formula tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hoz létre a természetes számok halmaza és az annak megfelezésével kapott páros természetes számok között, aminek nyomán mindkét halmazra ugyanazon cantori számosságot kapjuk. Ha azonban egy mennyiséget megfelezünk, annak feleakkorának kellene lennie, mint az eredeti mennyiségnek, és az, hogy ez a végtelen számosságú halmozok esetében nem így van, mindaddig, amíg figyelmen kívül hagyjuk a végtelenek strukturáltságára vonatkozó, később érintendő cantori eredményt, megerősítheti azt a hagyományos elképzelést, hogy a mennyiségi végtelen amorf, meghatározatlan, hiszen ami meghatározatlan, annak a fele is meghatározatlan. De e két halmaz számosságának azonossága érv lehet amellett is, hogy amit Cantor itt számosságnak nevez, az – amiképpen ezt Wittgenstein is állítja – a végtelen halmazok esetében valójában nem mennyiségi kategória, hanem valami más. Ugyanakkor e fogalom nem tartalmaz, formális ellentmondást, és ezért Cantorban az ilyen fogalmi jellegű ellenérv nem vetődött föl, és ö maga is öntudatlanul elkövette azt a csúsztatást, amelyet a későbbi populáris irodalom kapcsán már jeleztünk: a természetes számok halmazának ugyanolyan lezárt, jól meghatározott jelleget tulajdonított, mint amivel például az almáskosárban lévő 25 almaszem halmaza rendelkezik. Csakhogy az almaszemek mennyisége a hagyományos számlálással is meghatározható, és önmagában az, hogy az első 25 természetes szám és az almák közötti ***kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés***sel ugyanúgy 25-öt kapunk értékként, mint az almák ***hagyományos megszámlálás***ával, nem jogosít föl arra, hogy a 25-ös értéket és a természetes számok halmazára kapott „végtelen” számosságot azonos jellegűnek vagy minőségűnek tekintsük. Az összes természetes szám ugyanis a cantori számosságdefiníció bevezetése ellenére továbbra is ugyanúgy végigszámolhatatlan marad, mint azelőtt volt, és halmazuk elemeinek végtelensége csak akkor volna párhuzamba állítható a 25-tel (vagy bármely véges természetes számmal), ha föltennénk, hogy a végtelen sok természetes szám hasonlóképpen létezik valahol lezárt összességként, mint amiképpen az almák az almáskosárban, vagy a katonák egy katonai században.

Ha mégis elfogadjuk azt a cantori attitűdöt, mely a végtelen számosságot a véges, lezárt halmazok elemszámával azonos jellegűnek tekinti, fölvetődik a kérdés: vajon lehetségesek-e olyan halmazok, amelyek számossága nagyobb mint a természetes számok számossága? Cantor válasza erre, hogy a valós számok halmazának számossága nagyobb a természetes számok számosságánál, továbbá minden végtelen számossághoz megadható olyan halmaz, melynek számossága nagyobb – „még végtelenebb” – ennél az eredeti, már végtelen számosságnál.

A végtelen nagyságú számosságok sorozatának első tagját Cantor az „ $\overline{\text{omega}}$ ”[4] jellel jelöli, és ez megfelel a természetes számok „***megszámlálható***”-nak nevezett végtelenségének (amelyeket, mint láttuk, valójában még egy végtelen életű személy sem számolhat meg sohasem), következő számosságként pedig az „ $\overline{\text{omega}}$ ” számosságnál nagyobb „kontinuum végtelen”-t adja meg. Az általa így bevezetett számosságokra azután a héber ábécé első betűjét fölhasználva mint az alef-0, alef-1 …….. alef-n …. számosságokra utal, ahol az alef-0 az $\overline{\text{omega}}$, az alef-1 a kontínuum végtelen.[5] Azzal a kérdéssel viszont, hogy az alef-i számosságok között vannak e újabb számosságok, nem képes boldogulni, s ma már tudjuk, hogy ez az axiómarendszer megválasztásának kérdése — azaz az alkotó matematikai tevékenység során meghozható szabad döntéstől függ. Arra a kérdésre viszont, hogy lehetséges-e legnagyobb számosság, illetve ***lehetséges-e olyan halmaz, melynek számossága minden más számosságnál nagyobb***, sikerül választ találnia: ha föltesszük egy

[4] A felső vonás nélküli „omega” a később említésre kerülő rendszámok vagy ordinális számok egyike: a véges számokat követő „legkisebb” végtelen – „transzfinit” – ordinális számot jelöli Cantornál.

[5] Lásd mindezzel kapcsolatosan korábbi, 3. lábjegyzetünket.

ilyen halmaz létezését, ez logikai ellenmondáshoz vezet, és ezért ***ilyen számosság és ilyen számosságú halmaz nem vezethető be a matematikába.*** [6]

Cantor a számosságok mellett szintén bevezeti az „ordinális számok”-at vagy másképpen „rendszámok”-at, melyek a sorszámoknak felelnek meg, és a véges rendszámok mellett ezek között is definiál megszámlálhatóan sok végtelen nagyságút. (Pl. az öt mint mennyiség – öt pohár – és az öt mint sorszám – az ötödik pohár – nem azonos, s a kettő közül az „ötödik” kifejezés felel meg a cantori „ordinális szám”-nak). Viszont amiképpen a számosságok elméletében sem adható meg legnagyobb számosság, úgy az ordinális (azaz a „rend”-) számokra is igaz, hogy nem rendelhető föléjük egy olyan „szuper”-ordinális szám, egy „OMEGA”, mely ahhoz hasonlóan, amiképpen az„ $\overline{\text{omega}}$ ”, azaz a megszámlálható végtelen számosság minden természetes számnál nagyobb, minden ordinális számánál nagyobb volna.[7]

Cantor mind a végtelen számosságokat (azaz a végtelen kardinális számokat), mind a végtelen rendszámokat (azaz a végtelen ordinális számokat) „transzfinit” – „végesen túli” – mennyiségeknek illetve számoknak nevezi, s az ezekre vonatkozó elmélet a transzfinit számok (azaz a végtelen nagyságú számosságok és rendszámok) cantori elmélete. Megjegyzendő, hogy az eredeti cantori halmazelmélet – és így a transzfinit számokra vonatkozó matematikai elmélet is – a mai matematikai megítélés szerint „naiv” volt (ez azt jelenti, hogy nem adott alapfogalmaira precíz definíciókat, és elméletét nem alapozta meg axiomatikusan). Következő fejtegetéseinkben azonban nem fogjuk kihasználni a cantori elmélet ezen „naiv” voltát, és ezért azok ***a mai kritériumoknak megfelelő, korrigált, axiomatikus halmazelméletre, valamint az ennek keretében bevezetett végtelen számosságokra is ugyanúgy érvényesek maradnak, mint az elmélet eredeti, cantori megfogalmazására***.

3. A transzfinit számok cantori elméletének gondolkodástörténeti jelentősége

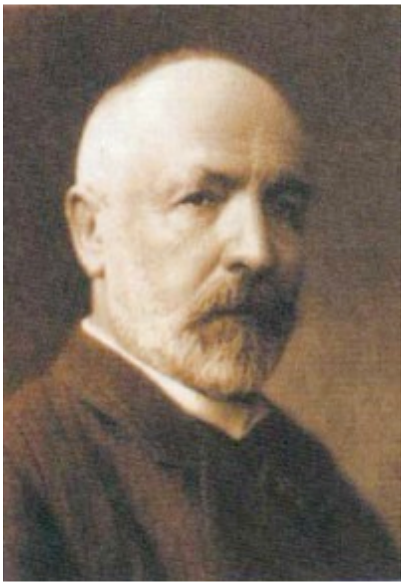
[6]: Cantor 1897 után nem tesz közzé újabb tanulmányokat, de intenzív levelezésének tartalma tanúsítja, hogy ezután is foglalkozik matematikai kérdésekkel. Az összes „alef” egyesítésével adódó halmaz számosságának ellentmondásosságáról v. ö. pl.: Cantor 1899/1932B: 448. (Lásd még Fraenkel 1932: 470; Cantor 1899/1932: 446-447; Cantor 1988: 83-85.)

[7] Annak bizonyítását, hogy ilyen rendszám nem létezik, 1897-ben Cesaro Burali-Forti olasz matematikus tette közzé. Abraham Adolf Fraenkel szerint azonban Cantor a Burali-Forti-antinómiában megjelenő ellenetmondást már 1895-ben ismerte (Fraenkel 1932: 470.). Fraenkel e tekintetben Cantornak Hilberthez 1896-ban írott levelére hivatkozik. V. ö. még: Cantor 1899/1932)

Halmazelméletével, és különösen elméletének azon részével, mely a végtelen halmazokkal és végtelen számosságokkal foglalkozik, Cantor teljes új és rendkívül hatékony eszközt adott a matematika kezébe, mely e tudomány számos területén kiválóan alkalmazható, és alkalmas arra, hogy az egymástól különböző matematikai területek tárgyalásában egységes szemléletmódot alakítson ki. A később axiomatikusan korrigált cantori elmélet pedig nagy jelentőséggel bír a matematika megalapozásában is.

Mint láttuk, gondolkodástörténetileg tekintve Cantor elmélete nem sokkal azután jelent meg, miután a matematikusoknak sikerült végre a végtelen kicsiny botrányosnak tartott fogalmát eltávolítani tudományukból. Cantor ebben a helyzetben halmazelméletével a másik pólusról – a végtelen nagy mennyiségek oldaláról – ***visszahozta a matematikába a végtelen fogalmát.***, s egyúttal az arisztotelészi tradícióval szemben kiállt ***a reális, valóságos*** – tehát aktuális – ***mennyiségi végtelen*** mellett, aminek nyomán ***a filozófiát is arra kényszerítette, hogy pro vagy kontra új módon közelítsen a végtelen problematikájához***. Továbbá azzal, hogy definíciójára alapozva a végtelen nagy számosságok nagyság szerint rendezhető sorozatát vezette be, a mennyiségi végtelen addigi meghatározatlan, amorf képzetét fokozatokkal bíró, strukturált mennyiségként állította elénk. Ezért a természetes és a páros természetes számok azonos cantori számossága mégsem intézhető el a korábbiakban fölvetett módon egyszerűen azzal, hogy végtelenségük meghatározatlanságára hivatkozunk (tehát arra, hogy a meghatározatlannak a fele és a kétszerese is értelemszerűen meghatározatlan marad), hiszen az, hogy a cantori elméletben egymástól különböző mértékű végtelen nagy számosságok vezethetőek be, éppen ezen meghatározatlanság ellen szól. Így e tekintetben két lehetőség marad: ***vagy elfogadjuk, hogy Cantornál olyan valóságos végtelen mennyiségekről van szó, melyek megfelezésük ellenére változatlanok maradnak, vagy megmutatjuk, hogy az, amit Cantor mennyiségnek tekint, és akként kezel, nem mennyiség, hanem valami más.***

A most jelzett fogalmi problémák ellenére ugyanakkor az axiomatikusan rendbetett cantori halmazelmélet a matematika legjobb tudomása szerint nem tartalmaz formális logikai ellentmondást, s ebben az értelemben matematikailag hibátlan. Az olyan fogalmi problémák, amily pl. a 25 almát tartalmazó halmaz és a természetes számok halmaza számosságának azonos természetűként való kezelése, és az ilyen csúsztatásokból adódó fogalmi ellentmondások (így az, hogy egy mennyiség fele azonos magával az eredeti mennyiséggel), nem formális, nem logikai ellentmondások, és nem érintik az elmélet matematikai hatékonyságát.



A képen Georg Cantor látható idősebb korában

4. Cantor filozófiai reflexiói saját elméletére

Mármost Cantor tisztába volt vele, hogy elmélete, mint matematikai fogalmak, szabályok, számítások, tételek és bizonyítások rendszere, filozófiai értelmezésre szorul. S miután oly neves matematikus kortársak, mint Kronecker vagy Poincaré – ***nem matematikai***, hanem ***prematematikai***, filozófiai jellegű megfontolások alapján – elutasították elméletét, rákényszerült arra, hogy azt filozófiai érvekkel is védelmezze.

Tekintetbe véve, hogy az elméletével kapcsolatos fönntartások elsősorban az aktuális végtelent érintették, filozófiai reflexiói is elsősorban az aktuális végtelenre irányulnak. ***Egyik*** – s talán általa legerősebbnek tartott – ***érve*** az aktuális végtelen létezése mellett az általa bevezetett végtelen számosságok és rendszámok logikai ellentmondás-mentessége. Úgy véli, hogy ez az ellentmondás-mentesség evidencia az aktuális végtelen matematikában belül jelenléte mellett. Ez azonban hibás érv. Kantot parafrazálva: hiába van hibátlan logikai elméletem a zsebemben lévő száz tallérról, az még nem válik létezővé sem a zsebemben, sem fejemben: ami létezni fog, az csupán a zsebemben lévő száz tallér fogalma, és az is csak a fejemben. Igaz, ha elképzelem darabra e nem létező száz tallér mindegyikét, akkor a száz tallér halmázának fogalma mellett a fejemben mind a száz tallér képzete (azaz száz egyedi képzet) is ott lesz, de éppen itt van az a pont, ahol Cantor érve megbukik: az összes természetes számot vagy az összes valós számot képtelenek vagyunk elképzelni. Halmazuk fogalma megalkotható, és annak ellentmondásmentesen végtelen számosság tulajdonítható, de ettől még elménkben, fejünkben, matematikai könyveinkben nem fog megjelenni aktuálisan végtelen sok természetes vagy valós szám. Abból például, hogy az aktuálisan végtelen sok számosságú természetes szám fogalma nem generál formális ellentmondást, nem következik, hogy akár elméletünkben, akár elméletünkön kívül ténylegesen létezne ez az aktuálisan végtelen sokaság. ***A végtelen fogalma nem azonos magával a végtelennel: ott ahol e fogalom jelen van, még nincs jelen a végtelen***, mint amiképpen a száz tallér fogalma sem garantálja még csak elménkben sem a száz tallér egyenkénti képzetének jelenlétét: ehhez e fogalmon túl egyenként el kellene képzelni mind a száz tallért, ami még talán lehetséges. Ám az „összes" természetes szám esetében ez nyilvánvalóan lehetetlen.

Cantor ***második érve*** elméletének fizikai használhatóságára hivatkozik.[8] Állítása szerint a megszámlálható végtelen matematikai fogalma a világegyetem fizikai elemeinek megszámlálható végtelen sokaságát ragadja meg, a kontinuum végtelen pedig a folytonos fizikai háttérközeg pontszerű alkotórészeinek mennyiségét. Ő maga konkrétan az atomok számára és az éterre gondol, de ez lefordítható a mai fizikába az atomok helyére a kvarkokat, az éter helyére a gravitációs mezőt helyezve. Ennek ellenére a kvantumosság és határozatlansági relációk miatt a kontinuum esetében ez az érv a mai fizika szerint nem áll meg, és az azt sem tartja szükségszerűnek, hogy végtelen sok számú elemi részecske létezzék a világegyetemben. Ám Cantor ezen érvével mégsem ez a fő probléma: eleve hibás az az állítás, mely szerint a mennyiségi végtelen matematikai elméletének fizikai alkalmazhatósága e végtelen fizikai aktualitását vonná maga után. E gondolatmenet filozófiai-ismeretelméleti problematikusságába itt nem tudunk belebocsátkozni. Arra viszont utalhatunk, hogy a mai fizika matematikája használja a matematikai végtelenfogalmát, de – mint láthattuk – az ezen matematikával leírt fizikai világban nem föltétlenül föltételezi végtelen mennyiségek létezését: bár használja e végtelenfogalmat, összeegyeztethető véges fizikai világgal is.

Cantor ***harmadik érve*** teológiai érv: alapjául Isten abszolút végtelensége és jósága szolgál.[9] Eszerint Isten abszolút, a matematika által sem megragadható végtelenségéből és jóságból inkább következik, hogy aktuális végteleneket is teremtett, mint ennek ellenkezője. A teremtett végtelenek pedig maguk az isteni végtelenség felé mutató, de annál alacsonyabb rendű transzfinit végtelenek, melyeket azután az emberiség Cantor szerint éppen az ő matematikájában ismer és ragad meg a traszfinit számosságok és rendszámok formájában.

Mindebből kitűnik, hogy Cantor matematikája nem ragadta meg az aktuális végtelent, illetve nem bizonyította annak létezését: matematikai ellenmondásmentességéből nem

[8] V. ö. pl.: Cantor 1887-1888/1932: 400.

[9] U.o.

következik a végtelen valós létezése, „aktualitása”. A mennyiségi végtelen aktualitását csak matematikán kívüli érvekre hivatkozva állíthatjuk, s Cantor vonatkozó érvei közül csak a teológiai működik. Ahhoz viszont előbb el kel fogadnunk Istennek mint abszolútumnak létezését.

A harmadik, teológiai érvben viszont egyúttal implicit módon bennfoglaltatik a teoplatonsita álláspont is: ha Isten transzfinit végteleneket teremtett, akkor azoknak előzetesen ott kellett lenniük örökkévaló elméjében, azaz ezen esetben a cantori transzfinitek örökkévaló létezők egy a fizikain és emberin túli szellemi szférában, Isten elméjében. Ismereteink szerint a transzfinitek ezen örökkévaló szellemi létezésének platonista ideáját Cantor ugyanakkor kifejezett módon is megfogalmazta. Így egy alkalommal a harmadik világot tételező klasszikus platonizmus jelenik meg nála, amikor arról ír, hogy a teremtett világban az emberi elmén és a fizikai világon kívül egy harmadik, szellemi szférában is jelen vannak a transzfinit számok[10], míg egy másik helyen kifejezetten a teoplatonista álláspont mellett kötelezi el magát, amikor azt fejtegeti, hogy a transzfinit mennyiségek örökkévalóan jelen voltak és vannak Isten értelmében.[11]

5. Cantor saját elméletének filozófiai státuszáról és Kanthoz való viszonyáról

Cantor filozófiai nézeteivel foglalkozva két elképzelését kell még megemlítenünk:

i) Elmélete alapján úgy véli, hogy meghaladta a mennyiségi végtelent érintő kanti antinómiát, és a transzfinit mennyiségekkel kapcsolatos saját eredményeire hivatkozva büszkén állítja, hogy Kant az emberi értelem tekintetben kishitű volt.[12] Elméletét tehát a mennyiségi végtelen elméleti meghódításában elért vélt sikerre hivatkozva mint az emberi értelem és ezen belül a matematika tudományának diadalát méltatja

[10] Cantor 1883/1932: 181.

[11] Lásd Cantor 1895. november 30-án kelt Charles Hermite-höz írt levelét. Idézi, illetve hivatkozik rá.pl. Dauben 1979: 228; Hallett 1984: 149; Purkert 1989: 58. (Bár idéz belőle, de a levél vonatkozó részletét a Cantor válogatott levelezésének 1999-es kötete nem tartalmazza, így tekintetében csak másodlagos források állnak rendelkezésünkre. Alevél eredetijének lelőhelye: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Nachlass Georg Cantor.)

[12] Cantor 1885/1932: 375.; illetve Cantor 1988: 79-80.

ii) Másik oldalról azonban a matematikát korlátozott hatókörűnek tartja, és az az álláspontja, hogy az csupán a transzfinit, tehát a „végesen túli” értelemben vett végteleneket képes megragadni, míg ***Isten intenzív végtelensége és maximális nagysága a teológia tárgya lehet csupán.*** Sőt, nézete szerint ***az isteni végtelenség mint „ abszolút végtelen” és a matematika által megragadható alacsonyabb rendű, transzfinit végtelenek között áthatolhatatlan szakadék tátong***, és amíg a transzfinitek a matematika tárgyát alkotják, addig már a maximális mennyiségi végtelen is csak ***a teológia tárgyát képezheti.***[13] Ugyanakkor ezen áthatolhatatlan szakadék ellenére úgy vélte, hogy a transzfinit rendszámok – azaz az „ordinális számok” – lezáratlan, végtelenbe szaladó sorozata ***Isten végtelenségét szimbolizálja***,[14] és így a matematika, mint sajátos résztudomány, bár az abszolút végtelen megközelíthetetlen számára, mégis e végső végtelen és azon keresztül az abszolútumra irányul.

iii) Ezen utóbbi cantori gondolatmenettel szemben fölvethető persze, hogy a rendszámok – az „ordinális számok” – végtelen sorozata hasonló természetű a természetes számok végtelen sorozatához, és így Cantor miért csak ezek sorozatát tekinti az abszolút végtelen szimbolizálásának? Csakhogy e két sorozat azonos természete látszat csupán. Ugyanis az „ $\overline{\text{omega}}$ ”, azaz az „alef-0”, annak ellenére, hogy a legkisebb cantori számosság, a cantori elmélet szerint nagyobb az 1,2,3 ….n …. sorozat valamennyi tagjánál. Ezzel szemben – mint láthattuk – a rendszámok sorozatához nem adható meg egy „szuper” OMEGA rendszám, mely valamennyi rendszámnál nagyobb volna, mint amiképpen az alef-0, alef-1 ….. alef-n …. sorozathoz sem adható meg ilyen, a sorozat minden tagjánál nagyobb „szuper” ALEF számosság, mivel mind egy ilyen OMEGA, mind egy ilyen legnagyobb számosság fogalma logikai ellentmondást tartalmaz. Ezért amíg a cantori elméletben az 1,2,3 ….n …. sorozatot az omega, mint végtelen, de jól meghatározott rendszám korlátozza, és a sorozat irányultsága e jól meghatározott transzfintit ordinális szám felé mutat, addig mind az alef-0, alef-1, alef-2 ……. alef-n ……. sorozat, mind a rendszámok sorozata irányultságaként a formális ellentmondást tartalmazó, és ezért a matematika által már megragadhatatlan, az emberi elme számára fölfoghatatlan abszolút végtelen nagyság adódik. Így e sorozatok, bár magukban még a matematikán belüliek, Cantor értelmezésében már a matematikán kívülre

[13] Pl. Cantor 1887-1888/1932: 402.

[14] Cantor 1883/1932: 205. illetve uő: 1887-1888/1932: 405

mutatnak[15] (bár az abszolút végtelen és a matematika közötti áthatolhatatlan szakadék miatt azt még csak meg sem közelíthetik[16]).

iv) Ami Cantornak saját elméletét Kanttal szemben magasztaló állítását illeti: az nyilvánvalóan a kanti antinómia félreértésén alapul, mivel Kant nem formális logikai, hanem a személetünkben és fogalmainkban adódó ellentmondásra hivatkozik. Továbbá a végtelenség-antinómia pontosan arról szól, hogy a végtelen összességek nem kezelhetőek lezárt egészként, és az összes számosság egyestésével kapott „legnagyobb számosság" fogalmának Cantor által fölfedezett logikai ellentmondásossága pontosan Kant ezen állítását támasztja alá. Ezért még a cantori szemléletmódot elfogadva is csak annyit állíthatunk, hogy Cantor elmélete csupán az alacsonyabb rendű mennyiségi végtelenek – a transzfinitek – megragadására képes, de a tulajdonképpeni mennyiségi végtelen tekintetében – tehát azon mennyiségi végtelen tekintetében, amelynél (úgy mint amiképpen ezt a végtelen eredeti fogalma magában foglalja) nincs „nagyobb", s ebben az értelemben valóban végtelen – kudarcot vallott. Ez pedig éppen – mint amiképpen erre a Cantor összegyűjtött műveinek kiadását szerkesztő Zermerlo is helyesen utal vonatkozó jegyzetében[17] – Kant álláspontját erősíti meg.

6. *A cantori végtelenfogalom lehetséges kritikái. Prematematika és posztmatematika*

Mint említettük, Cantor elmélete hihetetlenül hatékonynak bizonyult a matematikában, s a ma uralkodó matematika elképzelhetetlen volna nélküle. Fölvetődik tehát a kérdés, hogy mi értelme van kritikájának, és különösképpen az, hogy Wittgenstein mint filozófus vajon milyen jogon kritizálja azt?

E kérdésre megválaszolva elsőként arra a tényre kell emlékeznünk, hogy a Newton-Leibniz-féle differenciál- és integrálszámítás is hihetetlenül termékeny és sikeres volt, ám mégsem szűntek meg annak idején a vele kapcsolatos ***prematematikai*** fönntartások, és végül a bennük szereplő „végtelen kicsiny" kiküszöbölésre került. (Igaz, azóta bebizonyították, hogy a végtelen kicsiny newtoni-leibnizi fogalma is rendbe tehető matematikailag. Ám az így

[15] A témával kapcsolatosan v. ö. még: Neidhart 2007, illetve Tapp 2005 és Tapp 2014.

[16] V. ö. Cantor 1887-1888/1932: 405-406.

[17] Cantor 1885/1932: 377; Cantor 1988: 77.

kapott elmélet egyrészt már nem teljesen azonos az eredetivel, másrészt azt sem vonja maga után, hogy a mai matematikát ne lehetne a végtelen kicsiny fogalma nélkül művelni.)

Hasonló a helyzet Cantor elméletével is: sikere és axiomatikus változatának kidolgozása sem teszi érvénytelenné a vele kapcsolatos prematematikai fönntartásokat. És enne kapcsán nem alkalmazható a zseniális, de a korral haladni nem képes tudósokra vonatkozó mitológia sem: egyrészt azért nem, mert pl. az elméletet ellenző Henri Poincaré legalább annyira volt XX. századi modern gondolkodó, mint XIX. századi tudós. Másrészt azért sem, mert miután Cantor elmélete végül betört a matematikába, és oly nagy tudósok váltak hívévé, mint David Hilbert, immáron fiatal, tehetséges, „forradalmi" gondolkodású matematikusok szegültek szembe vele, és léptek föl egy új, nem cantoriánus, a végtelen fogalmát mellőző matematika kidolgozásáért. E fiatal matematikusok, így Brouwer és Weyl szemében pedig már éppen a cantori elmélethez való ragaszkodás tűnt elavultnak, régimódinak. De megemlíthetjük még azt is, hogy a konstruktív matematikának a matematikai végtelent szintén elutasító programja – amelynek egyik képviselője a szintén kiváló matematikus, Markov volt – ma is él és tudományosan elismert. A cantori matematikai végtelen kritikája tehát kiváló matematikusoktól fakadt, s mint ilyen, ma is létező matematikai irányzat, amelyet az 1920-as években ifjú, tehetséges, a matematika megújításán lelkesen dolgozó tudósok képviseltek. Wittgensteint pedig a már említett Brouwer insprirálta a cantori elmélet kritikájára, azaz e kritika nem a filozófusok, hanem famatematikusok felől érkezett. Nem Wittgenstein formálta Brouwer nézeteit, hanem az utóbbi mint matematikus gyakorolt jelentős hatást Wittgenstein filozófiájára. Persze Wittgenstein nem vált Brouwer mechanikus követőjévé: az utóbbi csak az inspirációt és az alapideákat nyújtotta számára, amelyeket ő azután továbbgondolt, átformált, elmélyített, és késői filozófiájának szuverén részévé tett.

A végtelen kicsivel kapcsolatos fönntartások kapcsán már használtuk a "prematematika" fogalmát. A cantori végtelen Wittgenstein-féle kritikájának megjelenik ugyanakkor egy ezzel ellentétes mozzanata: az osztrák filozófus több alkalommal is hangsúlyozza, hogy a filozófiai kritikának a matematikát érintetlenül kell hagynia, e kritika csupán arra irányul, amiképpen a matematikára tekintünk, amiként azt látjuk: föladata az, hogy az eddigi hibás megvilágítás helyett mintegy új fényben tárja elénk e tudományt. Az így fölfogott matematika-filozófiát ***posztmatematikai***nak nevezhetjük: a tárgyát képező matematikai elmélet megalkotása után, azt immár adottnak tekintve foglalkozik vele, elemzi azt. Ennek megfelelően a wittgensteini kritika nem a matematikába hatol be, hanem csupán azokat a konstrukciókat elemzi, amelyekre Cantor a mennyiségi végtelen különböző fokozatainak megragadásaként tekint, és Cantorral szemben amellett érvel, hogy itt nem jelennek meg mennyiségi végtelenek: az, amit Cantor annak vél, valójában nem mennyiségi meghatározás, hanem csupán véges konstrukciók tulajdonsága. Ezzel együtt kritikájának radikális volta és néhány megjegyzése alapján olykor mégiscsak úgy tűnik, mintha elemzéseinek a posztmatematikai mellett prematematikai – azaz a matematika megváltoztatására irányuló – értelmet is tulajdonítana. Ezen a következetlenségen azonban nem kell csodálkoznunk, hiszen matematikai nézeteit sohasem formálta egésszé: azokat hosszú évek alatt megfogalmazódott töredékes feljegyzései tartalmazzák. S e kettőséget értelmezhetjük úgy is, hogy ha maga Wittgenstein nem is akart a matematikához hozzányúlni, kritikájának egyik célja talán mégis az volt, hogy a matematikusokat a cantori matematika lecserélésére ösztönözze.

7. A cantori transzfinit fogalmának kritikai értelmezése Wittgenstein matematikafilozófiai jegyzeteiben

A végtelen kapcsán hangsúlyozandó ***első*** wittgensteini gondolat szerint a végtelennek (pl. egy végtelen fasornak) – fogalmából következőleg – *nincs vége*, [18] azaz „*a vég nélküliségben éppen a vég nélküliség a végtelen*”[19]. Filozófiailag „egzaktabb” megfogalmazásban: „értelmetlen a végtelen számsorozat egészéről beszélni”,[20] mivel a „végtelen totalitás” fogalma ellentmondáshoz vezet.[21] (Csak zárójelben jegyezzük meg, hogy itt az osztrák filozófus nem föltétlenül logikai ellenmondásra gondol. Így a tényszerűen egyébként sem végtelen cantori konstrukciók logikai ellentmondásmentessége nem lehet ellenérv vele szemben.)

E gondolat olvasható csupán posztmatematikai megállapításként is: nem azt állítja, hogy eleve hibásak azok a matematikai konstrukciók, amelyeket Cantor és követői a

[18]Wittgenstein: *Philosophische Bemerkungen* (PhB) XII/123 (Wittgenstein 1964: 146.), illetve uő: *Philosophische Grammatik* (PhG) Teil VII/39. 16. bekezdés (Wittgenstein 1984: 455.)

[19] PhB XII/145. utolsó mondata (1964: 167.)

[20] PhB XII/144. első bekezdése (i.m.: 164.)

[21] PhB XII/145. negyedik bekezdés (i.m.: 166.)

mennyiségi végtelen megragadásának tekintenek: csupán arra mutat rá, hogy tényszerűen itt nem mennyiségi végtelenekről van szó, hanem végesek vég nélküli folytathatóságról, mint tulajdonságról. S ha nem tételezzük föl, vagy nem hiszünk abban, hogy Isten vagy valamely istenség elméjében, illetve egy platóni harmadik világban ténylegesen létezik a végtelen sok természetes szám, azaz ha nem építkezünk matematikán kívüli föltételezésekre és/vagy hitbeli tételekre, e wittgensteini bírálatot el kell fogadnunk. Hiszen ekkor például a természetes számok esetében csak annyit állíthatunk, hogy azok a természetes számok léteznek tényszerűen, amelyeket eddig az emberiség és eszközei (pl. a számítógépek) már megkonstruáltak, és ezek halmazának elemszáma szükségképpen véges, továbbá hogy ezen felül matematikai elméleteinkben jelen van a megszámlálhatóan végtelen sok természetes szám logikailag ellentmondásmentes elméleti fogalma (mely utóbbiból – mint láttuk – egyáltalában nem követezik, hogy akárcsak elménkben valóban létezne ez a végtelen sok természetes szám).

Ám ha ez így van, akkor ez utóbbi, a végtelen sok természetes szám fogalma hibás, ‚”lyukra futó” fogalom volna? Wittgenstein válasza erre a kérdésre az, hogy téves, de nem üres fogalomról van itt szó: van matematikai vonatkozása, ám ez nem a mennyiségi értelemben vett végtelen, hanem a vég nélküli továbbfolytathatóság mint tulajdonság. Így például a természetes számok képzési szabálya véges szabály, melyet egy véges lény is alkalmazni képes, de végtelen tulajdonságú abban az értelemben, hogy vég nélkül folytatható. Ugyanígy, ennek nyomán a természetes számok bármely nagy, de mindig kikerülhetetlenül véges elemszámú halmaza is a vég nélküliség ***tulajdonság***ával rendelkezik, amennyiben újabb és újabb természetes számokkal bővíthető. Ennek megfelelően Wittgenstein szerint a természetes számok esetében a végtelenség mint „vég nélküliség”, mint lezárulatlanság vagy nyitottság, tényszerűen két mozzanatra vonatkozik: a természetes számok képzési szabályára, és a természetes számok bármely nagy, de mindig véges halmazára vagy sorozatára. Nem végtelen mennyiségekről van itt szó, hanem egyrészt egy véges képzési szabály vég nélküli alkalmazhatóságáról, hiszen az a szabály, mely szerint, ha n természetes szám, akkor mindig képezhető a n+1 természetes szám, véges szabály, másrészt a természetes számok véges elemszámú halmazainak és sorozatainak azon tulajdonágáról, hogy mindig, azaz „vég nélkül” bővíthetőek. Ez a tulajdonság valósásos, azaz aktuális: bennük aktuális végtelenről van szó, de nem mennyiségi végtelenről, hanem „vég nélküliség”-ről, „lezáratlanság”-ról, „nyitottság”-ról mint tulajdonságról.

Bár utóbbi példánkban csak a természetes számok szerepelnek, a wittgensteini kritika természetesen vonatkozik minden olyan konstrukcióra, amelyekhez a cantori matematika a mennyiségi végtelen képzetét társítja. Így tisztán matematikai rétegét tekintve Wittgenstein nyomán belátható, hogy Cantor matematikája valójában nem az aktuális mennyiségi végtelennel, hanem csak a vég nélküliség különböző fajaival foglalkozik. A hiba nem magában a matematikában, hanem annak értelmezésben keresendő: a mennyiségi végtelen tekintetében súlyos fogalomtévesztésnek áldozatai vagyunk, s e tévedés nemcsak egyszerűen abban áll, hogy egy fogalmat összekeverünk egy másik fogalommal (pl. a feketét a fehérrel), hanem egyúttal kategória- vagy típustévesztés (modern számítástechnikai kifejezésével „type mismatch") is. Mintha azt mondanánk, hogy zöld színt hallunk, vagy terc hangközt szagolunk. Mert amikor „végtelen" nagyról vagy „végtelen sok" számról beszélünk, akkor a „végtelen"-t, amely nem mást jelent mint „vég"-telent, azaz „vég nélküliség"-et, ugyanúgy mennyiségi kategóriaként, mennyiségi típusú jelzőként használjuk, mintha mondjuk egy két méter nagy fáról, vagy egy százezer lakosú városról beszélnénk. A mindennapi gondolkodás és Cantor matematikája ennek ellenére mennyiségi jelzőként kezeli e fogalmat, és Wittgenstein kritikájának lényege az, hogy ha ezt elkövetjük, kategóriatévesztés miatt értelmetlen képzetek rabjává válunk.

Wittgenstein fasor-érve egyénként akkor is érvényes, ha a platonista fölfogás követjük: attól ugyanis, ha a természetes számokat mind létezőnek tekintjük egy elménk kívüli világban, azok sorozata még nem válik lezárttá, nem lesz e sorozatnak „vége". Így továbbra sem juthatunk el annak a végére, hasonlóan ahhoz, mint a végtelen fasornak sem juthatnánk még akkor sem a végére – még végtelen sebességgel sem – ha az létezne valahol. Hiszen ami nincs, oda végtelen sebességgel sem lehet eljutni. Ezért a végtelen halmazok elemeinek jól meghatározott végtelen mennyiségként adódó számosságát a platóni értelmezés sem biztosítja önmagában. Ehhez nem elég külön-külön tételeznünk a halmaz valamennyi lehetséges elemeinek létezését Isten elmeéjében vagy egy harmadik világban, hanem azt is föl kell tennünk, hogy ezen elmében vagy harmadik világban valamily, eszünk által fölfoghatatlan értelemben mégiscsak a végére juthatunk, lezárhatjuk a végtelen sok elemsokaságát – ha másképp nem, azok összességbe foglalás révén.. Amikor a természetes vagy a valós számok összességére jól meghatározott halmazként tekintünk, valójában éppen ezt az összességbe foglalás műveletét követjük: nem csupán a természetes számokra, hanem azok összességbe foglalására is platonista módon gondolunk.

A ***második*** itt tárgyalandó wittgensteini gondolat a számsorok végére tett ***„és így tovább”***, illetve az azt helyettesítő pontok jelentésére vonatkozik. Ezeket a pontokat szokásosan rövidítésként értelmezzük: a számok végtelen sorozatában szereplő ki nem írt elemek rövidítéseként. Csakhogy, hívja föl a figyelmet Wittgenstein, e pontok valójában nem ezt jelentik, hanem csak azt, hogy bármily nagy számmal is végződik sorozatunk, azt továbbfolytathatjuk. Mégpedig nem azért, mert azon túl ott vannak és „valamiféle gigantikus kiterjedés”-ként[22] a végtelenbe nyúlnak a sorozat további tagjai, hanem mert a sorozatot egy soha le nem záruló képzési szabállyal képezzük. A pontok így arra utalnak, hogy a sorozat bármilyen „távoli” eleméhez is jutottunk el, erre is alkalmazhatjuk a képzési szabályt.[23]

Ez a wittgensteini állítás tulajdonképpen az előző állítást ismétli meg, de most nem a végtelenség matematikai fogalma, hanem a matematikai jelölésmód tekintetében: arra vonatkozik, hogy bár e pontok tényszerűen a vég nélküli továbbfolytathatóságra utalnak, azokat hajlamosak vagyunk tévesen mennyiségi jelként értelmezni, és e hajlam nyomán tévesen a Wittgenstein szerint tényszerűen nem létező végtelen sok természetes szám pótlásaként tekinteni rájuk. Így míg az 1,2,3 ……………………………….. n ………………………. jelölési módban a 3 és az n közötti pontok Wittgenstein szerint is valóban számokat helyettesítenek, mégpedig a 3 és a n véges természetes számok közötti véges elemű számhalmaz rendezett elemeit, ami értelmes jelölés, addig hibát követünk el, ha az n utáni pontokat ugyanígy értelmezzük: itt e pontok már nem kiterjedésre, nem halmazra, hanem tulajdonoságra: a vég nélküli folytathatóságra utalnak. Arra, hogy folytatólagosan, vég nélkül újabb és újabb számokat alkothatunk.

Fölvetődik a föntiek jegyében az a kérdés, hogy mi a helyzet az irracionális számokkal és a kontinuum-végtelennel? Ez a kérdés jóval bonyolultabb, mint a természetes számok kérdése, de itt is belátható, hogy tényszerűen (tehát valamennyi elvben lehetséges valós szám elménken kívüli létezésének föltevése nélkül) a valós számok kontinuum-végtelensége sem mennyiségi meghatározás, hanem vég nélküli képezhetőségük tulajdonsága. Wittgenstein ***elemzés alá veszi a jól ismert átlós eljárást***, s arra a következtetésre jut, hogy ez az eljárás csupán azt bizonyíthatja, hogy a valós számok ***jellegükben*** különböznek a kardinális számoktól, azaz a számosságoktól, de azt nem, hogy mennyiségileg „többen” volnának.[24] Bár

---

[22] Wittgenstein: *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (BGM) V-19 (Wittgenstein 1974: 278-279)

[23] Vö. pl: BGM V-19 (1974: 278-279), PhG Teil II. /10. (Wittgenstein 1984: 280-288)

[24] V. ö.: BGM II 1-23, különösen II 22.(1974 125-132)

ezen álltás, mely ***a harmadik*** általunk itt tárgyalásra kerülő wittgensteini gondolat, a kardinális számokra vonatkozik, az érvényes a természetes számok és a valós számok viszonyára is. Wittgenstein szerint tehát az átlós módszerrel azt mutathatjuk meg, hogy a kardinális számok és a valós számok (illetve a természetes számok és a valós számok) jellegükben alapvetően különböző fogalmak. Viszont – folytatódik elemzése – a cantori szóhasználat ezt ***e jellegbeli különbséget terjedelmi különbséggé torzítja,*** (azaz előbb használt kifejezésünkkel itt egy újabb „type mismatch", azaz kategóriahiba keletkezik), amit ő azután „hókusz-pókusz"-nak („Hokus-Pokus")[25]minősít, s azt, hogy ez megtörténhet, ***a kor betegségeként*** jellemzi.[26]

Ez a Wittgenstein által „hókusz-pókusz"-nak nevezett eljárás, azaz az a mód, ahogy az átlós eljárást mennyiségi különbség demonstrálására használják, ma a matematikusok többsége számára problémamentesként jelenik meg, ami persze érthető: mint már jeleztük, mind a matematikai végtelen cantori fogalma, mind pedig az annak alapjául szolgáló cantori halmazelmélet technikailag oly hatékonynak bizonyult a matematikában, és oly forradalmian újította meg annak szemléletét, hogy ez minden további vizsgálódást elnémított. Hilbert kifejező hasonlatát fölhasználva, Cantor olyan „paradicsom"-ot teremtett a matematikusok számára, amellyel nem csupán kárpótolta a matematikus észt a bibliai paradicsom elvesztéséért cserébe, hanem amely technikai értelemben elképzelhetetlenül hatékonynak bizonyult a matematika szinte valamennyi területén, és ez az élmény sokak számára elzárja az utat a cantori koncepció alapjaira irányuló filozófiai reflexió elől. Ugyanakkor láttuk azt is, hogy a cantori végtelen wittgensteini bírálata nem valami külső-idegen, a filozófusok által a matematikára rá oktrojálni kívánt kritika, hanem a matematika művelésének szabályaival, elvárásaival van összefüggésben, s elsőssorban matematikusoktól ered. Amit az osztrák filozófus csinál, az ugyan radikális, és a saját (metafizikaellenes és ennek részeként antiplatonista) filozófiájának kontextusába illeszkedik, ám különböző – részben az övéhez hasonló, részben más – megfontolásokból olyan kiváló matematikusok is szkepszist fejeztek ki, és fölléptek a cantori végtelennel szemben, mint Kronecker, Poincaré, Brouwer, Weyl, Markov, stb.

---

[25] BGM II-22. utolsó mondat. (1974 :132.)

[26] BGM II-23.(1974: 132)

Mint már említettük, az, hogy Wittgenstein ezen elemzései mennyiben csupán a matematikát változatlanul hagyó posztmatematikai értelmezések, és fogalomkorrekciók, és mennyiben irányulnak a matematika reformjára, nem egyértelmű. Kritikája radikalizmusa és néhány megjegyzése alapján úgy tűnik, hogy ő maga nemcsak a végtelen platonista-mennyiségi értelmezései ellenlép föl, hanem az ilyen értelmezésre csábító, vagy azt egyáltalában lehetővé tévő cantori matematika ellen is, és vele szemben egy olyan matematikát tartana kívánatosnak, mely a mennyiségi végtelen platonista értelmezését eleve kizárja. A továbbiak szempontjából azonban ennek számunkra nincs jelentősége. Ami fontos az az, hogy elemzésében a lezárt, meghatározott mennyiséggel rendelkező végtelen elemű halmazok fogalmát értelem nélkülinek tekinti, és arra mutat rá, hogy a matematika cantori végtelenjei valójában nem mennyiségi meghatározások, hanem mint „vég nélküliség", „vég nélkül továbbfojtathatóság, mint „lezáratlanság" vagy „nyitottság", végesek tulajdonságai. Ez a nyitottság mint minőség pedig (szemben a mennyiségi végtelen Wittgenstein által tévesnek tartott képzetével) mindig itt és most, aktuálisan, a végesben, a véges emberi elméletek véges képzeteiben van jelen.

8. A matematikai „végtelen" valódi paradoxona: a faktikusan véges matematikai konstrukciók és a platonista végtelen intuitív képzetének konfliktusa

A matematikai végtelen úgynevezett „paradoxonai"-nak bőséges irodalma van. Ilyen kedvelt, sokat hivatkozott állítólagos paradoxon például az az említett cantoriánus állítás, mely szerint ugyanannyi páros egész szám létezik, mint ahány páros és páratlan egész szám együttvéve, s amely kapcsán rámutattunk arra a fogalmi csúsztatásra, amelyen ez a tétel alapul. A szóban forgó irodalom persze vitathatatlan adottságnak tekinti e cantori tételt, s nem veszi észre, hogy nem más, mint a szigorúan matematikai értelemben vett tétel téves, a vég nélküliség fogalmát a mennyiségi végtelenbe átcsúsztató, ezáltal a természetes és a páros természetes számok nyitott halmazát lezárt halmazként kezelő átértelmezése. Ennek megfelelően a kérdésre, hogy miképpen lehet egy mennyiség fele azonos az eredetivel, azt válaszolja, hogy a végtelen más mint a véges; a végtelennek (s így a végtelen sok egész szám „végtelen"-jének) természete eltér a végesétől: a végtelen a véges kapcsán megszokott képzeteinkkel összevetve paradox természetű, és a természetes számok, illetve a páros természetes számok összességének azonos számossága, amely annak ellenére fönnáll, hogy az utóbbit az előző „megfelezésével" kapjuk, e paradox természet megjelenése. A matematikai végtelen e szokványos megközelítésének népszerű kifejtését lásd pl. Péter Rózsa élvezetes és közérthető stílusban megírt *Játék a végtelennel* című könyvében. (Pl.: 9. kiadás, Budapest: Typotex 2010.)

Mármost láttuk, hogy minden hitbeli, filozófiai illetve matematikán kívüli hipotetikus kiegészítés nélkül, mely szerint valamilyen módon létezik az összes természetesen szám. Wittgenstein érveinek ismeretében csak annyit állíthatunk, hogy a ténylegesen adott természetes számok száma véges, és amit azok mennyiségi végtelenségének szokás nevezni, az valójában tulajdonság:. a nyitottság, a lezáratlanság, a vég nélkül folytathatóság tulajdonsága. Láttuk azt is, hogy tényszerűen, az emberi világban, az emberi elméletek rendszerében – így a matematikában – megalkothatjuk ugyan a természetes számok mennyiségileg végtelen sok elemet tartalmazó halmazának a fogalmát, s az a matematikán belül lehet formállogikai értelemben ellentmondásmentes, ám ebből nem következik még, hogy akár az ember világában, akár máshol ténylegesen létezne ilyen halmaz az általa tartalmazott végtelen sok természetes számmal, mint amiképpen az sem, hogy a fizikai világban létezne az e halmaz feltételezett mennyiségi végtelenségének megfelelő fizikai végtelenség – például végtelen sok elemi részecske. S mivel ugyanez elmondható az irracionális számok halmazáról, és a cantori végtelen minden formájáról, nehezen vitatható, hogy Witttgensteinnek tényszerűen, a tulajdonképpeni, a matematikain kívüli állításokkal ki nem egészített matematika tekintetében igaza van.

De Wittgenstein ahhoz is megadja a kulcsot, miképpen korrigálható a cantori matematika fogalomhasználata úgy, hogy magához a matematikához ne kelljen hozzányúlnunk. Így ha – immár nem őt követve, hanem csupán gondolatait alkalmazva – a végtelen számosságú halmazok helyett bevezetnénk az „alef tulajdonságú halmazok" szóhasználatot, amely a végtelen számosság kifejezéssel, mint mennyiségi terminológiával szemben a vég nélküli továbbfolytathatóságra, a lezáratlanságra, a határtalanságra, a nyitottságra, mint tulajdonságra utal, kikerülhetővé válhatnának a félrevezető megfogalmazások. Így nyilvánvalóvá válhatna hogy amíg a 25 almát tartalmazó kosár almahalmazának számossága egy lezárt sokaság mennyiségi meghatározása, addig ezzel a szemben a természetes számok halmazát nem illeti meg mennyiségi meghatározás, csak az alef tulajdonság, mint vég nélküliség, mint vég nélkül továbbfolytathatóság. A végtelen („transzfintit") számosságok sorozata helyett pedig az alef tulajdonságú halmazokon belül alef-0, alef-1 (kontinuum). alef-2 ……. alef-i …….. tulajdonságú halmazokról lehetne beszélni, míg más összefüggésekben a végtelen összegzés, a végtelen összeg stb. helyett kizárólagosan az egyébként is használt határátmenet és határérték fogalma maradna használatban, anélkül az egyébként matematikailag teljesen szükségtelen föltevés nélkül, hogy a sorozat vagy az összeg a végtelenben elérhetné határértékét (mintha a végtelennek mégiscsak „vége” lenne, és ott állna e „vég”-nél a határérték). Az így korrigált cantori nyelvezetben persze már nem lehetne megfogalmazni a „matematikai végtelen” szenzációs paradoxonjait. Ám megvolna az az előnye, hogy a tulajdonképpeni matematikát érintetlenül hagyva ***leválasztaná azt platonista értelmezéséről***, és a cantori elméletet filozófiai értelemben tiszta, ***filozófiailag semleges matematikaként jelenítené meg***, meghagyva így e lehetőséget a különböző filozófiai (így akár a wittgensteiniánus, akár a platonista vagy más) értelmezés számára.

S itt van az a pont ahol a wittgensteini elemzés tényszerű igazságának elismerése ellenére a jelen írás élesen elkanyarodik a wittgensteini állásponttól. Mert Wittgenstein annak megmutatásán túl, hogy a cantori matematikában valójában nincs jelen a mennyiségi végtelen, csak a határtalanság, a „vég nélküliség”, egyúttal – immár nem a matematikára, hanem a filozófiára irányulva – metafizikaellenes beállítódásának következtében a matematika platonista filozófiai értelmezését is tarthatatlannak ítéli, mint amely a nyelv általi megbabonázottság következménye, s amelytől ezért a filozófiának meg kell tisztítania az emberi gondolkodást.

Wittgenstein ezen radikálisan antimetafizikai, antiplatonista filozófiai beállítódása kapcsán azonban óhatatlanul fölvetődik a nyugtalanító kérdés: Mi lehet az oka annak, hogy a nyelvnek ily elvarázsoló ereje van? Mi teszi lehetővé ezt az elvarázsolást, mely annak ellenére, hogy a matematikában a végtelen tényszerűen valóban csak mint vég nélküliség, mint határtalanság van jelen, mégis a mennyiségi végtelen felé ösztönzi annak értelmezését? Mely a vég nélküliséget, a lezáratlanságot mint tulajdonságot tévesen lezárt mennyiségként jeleníti meg? Csupán a nyelv általi megbabonázottság volna az oka annak, hogy az 1,2,3 ………. n………. jelölési módra tekintve, ahol az „n” utáni pontok önmagukban, tényszerűen csak a továbbfolytathatóságot jelentik, mégis egyfajta „gigantikus” kiterjedés, „gigantikus” mennyiségű elemet tartalmazó összesség képzete idéződik föl bennünk? Wittgenstein e kérdéseket nem fogalmazza meg, pedig alapvető jelentőségűek, hiszen a mennyiségi végtelen képzete erősebben kísért mind a matematikában mind a mindennapi életben annál, hogysem e képzeteket csupán nyelvi hiba következményeinek tekinthetnénk. Az osztrák filozófus számára a nyelv e félrevezető, megbabonázó ereje a végső faktum, melyre mindent vissza kell vezetni, és a további kérdezés tilos, mert az ilyen további kérdezés szintén a nyelv általi megbabonázottság állapotának következménye és tünete. De el kell e föltétlenül fogadnunk Wittgenstein eddig bemutatott meggyőző erejű, tényszerű állításainak elfogadásával együtt ezt az állítást is, hiszen az immár nem tényszerű kijelentés, hanem filozófiai álláspont, filozófiai interpretáció kifejezése?

Másképpen megfogalmazva, és kifejezetten a matematikára gondolva: meggyőzhetnek ugyan bennünket Wittgenstein mélyre látó elemzései, és igazat kell adnunk neki abban. hogy a matematikában tényszerűen nincs mennyiségi végtelenség csak „vég"-telenség, azaz „vég nélküli" továbbfolytathatóság, ám ennek ellenére a cantori matematikát művelve személyes tapasztalatként többnyire mégiscsak fölidéződik a szemléletben, az intuitív fantáziában a végtelen valamiféle, racionálisan megragadhatatlan, sejtelmes-homályos képzete: elkerülhetetlenül úgy érezzük, mintha a véges szimbólumokon keresztül mégiscsak valamiféle – bár képszerűen megjeleníthetetlen, fogalmailag megragadhatatlan – végtelenekkel szembesülnénk**.**

Miképpen kapcsolódhatnak és tényszerűen miképpen kapcsolódnak a cantori – bár végtelennek minősített, de valójában véges, csupán vég nélküli – konstrukciókhoz, fogalmakhoz és az azokat leíró szimbólumokhoz, definíciókhoz és eljárásokhoz a mennyiségi végtelen ezen intuitív képzetei? Miért idézi fel a vég nélküliség szemléletükben a végtelen mennyiség egyfajta, bár kétségen kívül megjeleníthetetlen, elképzelhetetlen, és fogalmi ellentmondások nélkül megragadhatatlan képzetét? Ez e kérdésekben megjelenő feszültség az, amit – szemben a matematika platonista olvasatán alapuló, s a populáris irodalomban nagy előszeretettel tárgyalt végtelen-paradoxonokkal – a matematikai végtelen valódi paradoxonának neveztünk. ***S itt nem csupán külsődleges kapcsolatról van szó***: nem egyik oldalról a matematikai szimbólumoknak, valamint a vég nélküliségnek, a határtalanságnak mint tulajdonságnak, másik oldalról a végtelennel kapcsolatos metafizikai nézeteinknek esetleges, véletlenszerű összetalálkozásáról. ***Nehéz ugyanis elképzelni, hogy a cantori matematika megszülethetett volna a végtelen egyfajta intuitív képzete, illetve ezen intuitív képzet irányító-szabályozó működése nélkül.*** A kész cantori matematika e képzet nélkül is jól működik, ám mégiscsak úgy érezzük, hogy e végtelenképzetek motiválják és irányítják a vele való foglalkozást. Igaz, Wittgenstein ezt az utóbbi problémát elintézi azzal, hogy a nyelv „elvarázsol", „megbabonáz" bennünket, és ezért terápiára van szükségünk. ***De éppen ez az a pontja filozófiájának, mely erős kétségeket ébreszt, és elvezet ahhoz, amit az előbb mint a „matematikai végtelen igazi paradoxoná"-t jelöltük meg.***

Az eddigieket összefoglalva tehát

i) Wittgensteinnek tényszerűen igaza van abban, hogy a cantori matematikában magában nincs valóságos mennyiségi végtelen, és az önmagában tekintve csupán a „vég nélküliség"-ről, mint határtalanról, lezáratlanságról, nyitottságról szól, melyek nem mennyiségi, hanem véges konstrukciók tulajdonságát leíró „tulajdonság"-kategóriák.

ii) Az osztrák filozófusnak tényszerűen igaza van abban is, hogy ezen tulajdonságot leíró kategóriák nyelvhasználati hiba miatt fordulnak át mennyiségi kategóriákba.

iii) Az viszont már nem tényszerű állítás, hanem filozófiai értelmezés, hogy a nyelvhasználati hiba és annak forrása, a nyelv elvarázsoló ereje, olyan végső tényt képez, melyen nem léphetünk anélkül tovább, hogy ne követnénk el újból nyelvhasználati hibát. Ezzel az állítással szembeszegezhető az az álláspont, mely szerint e nyelvhasználati hiba elsődlegesen nem a nyelv természetéből fakad, hanem a végtelen vagy az abszolútom minden nyelviséget megelőző, miden nyelviségnél eredendőbb, fogalmilag megragadhatatlan intuitív képzete, mint elsődleges faktor, ösztönzi e nyelvhasználati hibát. Wittgenstein persze elutasítaná ezt az állítást, és a végtelen ezen intuitív képzetét is a nyelv általi elvarázsoltságra vezetné vissza. Ám az ellentétes elképzelés, mely szerint a végtelen ezen bennünk lévő, és a matematika művelése során mennyiségi végtelenként megjelenő intuitív képzete elsődleges a nyelvhez képest, azt megelőző, attól független fenomén, legalább annyira értelmes, racionális koncepció, mint az eredeti, wittgensteini állítás.

Az eddigiekből az is kiderül, hogy ***a matematikai végtelen most jellemzett „valódi" paradoxonát nem lehet pusztán racionálisan fölismerni: csak élményként megélve szembesülhetünk vele.*** Ennek oka pedig a következő:

i) Egyik oldalról e paradoxon észleléséhez szükség van ***a matematikai végtelennel kapcsolatos intuícióra, amely mindig egyes számú, első személyű, a maga eredetiségében közvetíthetetlen, nem racionális élmény, valamint arra, hogy az elnyomására irányuló törekvés helyett tudatosan szembesüljünk ezzel az élménnyel.***.

ii) Másik oldalról e paradoxon észlelésének föltétele annak fölismerésére is, **hogy *a faktikus, tényszerű matematikában csak véges definíciókkal, axiómákkal van dolgunk, s bár a „végtelenek matematikájá"- ban a képzési szabályok és műveletek vég nélkül folytathatóak, tényszerűen mindig csak véges lépés hajtható végre belőlük.*** (Mint például a számolás műveletében, mely ugyan vég nélkül folytatható, de pontosan ezért sohasem juthatunk el a „végé"-re).

Azok számára, akiknek nincs meg az i)-ben jelzett intuitív élmény, vagy ugyan megvan, de platonista módon úgy véli, hogy a matematikában ettől függetlenül is egzakt, jól megragadott módon jelen van az aktuális végtelen, ez a paradoxon nyilván nem lép föl, hanem helyette a populáris irodalomban nagy kedvteléssel tárgyalt végtelenségparadoxonok jelennek meg „igaziakként".

Ami Wittgensteint illeti, esetében csak tűnődhetünk, hogy

a) megvolt-e benne vajon az i)-ben jelzett élmény, csak éppen mint káros, félrevezető, irracionális vízióval, elkeseredetten küzdött ellene, meg akarta azt semmisíteni;

b) nemcsak megvolt benne, hanem el is fogadta, de olyan nyelvileg meg nem közelíthető tényezőnek tekintette, mely a nyelvre nem képes hatást gyakorolni, és amelynek minden nyelvi megjelenése félrevezető és eltávolítandó hiba;

c) egyáltalában nem is rendelkezett ezzel az élménnyel.

Bármelyik eset is állt fönn nála, az ő számára az előbbiekben általunk „valódi"-ként leírt végtelenség-paradoxon nem létezett, és a jelen írásban történő fövetését minden bizonnyal olyan beszédmódnak minősítené, ami éppen a nyelv elvarázsoló erejére szolgál elrettentő példával.

9. A fenomenológiai metafizikai Tengelyi László-féle programja és a cantori végtelen koncepciója

Tengelyi László Cantor-elemzése az általa megfogalmazott, „ontoteológia nélküli" (azaz Isten, az abszolútom vagy más transzcendens, világon fölüli tényező létezésének elmélete nélküli) fenomenológiai metafizika programjának részét képezi: egy ilyen metafizika lehetséges végtelenségfogalmat veti össze a filozófia perspektívájából a cantori végtelenfogalommal, mint egy speciális résztudomány, a matematika sajátos végtelenfogalmával. A „végtelenség" kérdésének elemzése és fenomenológiai fogalmának előkészítése ezen program első lépcsőfokát (mintegy a program metafizikai irányultságának és alapkérdéseinek első fölvázolását) jelentette volna számára, s ez az első lépcsőfok képezi tulajdonképpeni tárgyát Tengelyi utolsó, „Világ és végtelenség" című monográfiájának. [27] Tragikusan korai halála következtében azonban e monográfia ma mint az életpályát lezáró mű áll előttünk.

Az említett monográfia célja tehát, hogy megalapozza a világ végtelensége fenomenológiai fogalmának kidolgozását, melynek során e végtelenségre mint valóságos, tehát aktuális végtelenégre tekint. Nyilvánvaló, hogy amíg ez a fogalom a fenomenológiai metafizika egyik alapfogalmaként nem lehet azonos sem a hagyományos, a „teremtett" vagy véges téridőbeli világgal szembeállított abszolútummal, sem a téridőbeli világ extenzív (időbeli, térbeli és mennyiségi) végtelenségével, addig az éppen a középkori ontoteológiák aktuális végtelennek tekintett abszolútuma helyére kerülne: az annak elvetésével keletkezett űrt töltené be, immáron nem ontoteológiai, hanem a fenomenológiai metafizika kulcsfogalmaként.

Tengelyi e törekvésében egyszerre jelenik meg szellemi habitusa és gondolkodói életpályájának szintézise. Programja egyik oldalról a filozófus széles körű filozófiai műveltségén, így különösen a középkori latin filozófiában való jártasságán alapul (ami a XX. századi filozófia művelőinek jelentős részéről nem mondható el). Másik oldalról törekvését áthatja fogékonysága a világ „végső" megértésére irányuló filozófiák iránt. Ez a két mozzanat pályája kezdetétől jellemezte munkásságát: nem véletlen, hogy korai monográfiájában nagy hangsúlyt fektet e „végső" megértés egyik kulcsproblémáját, a világban jelenlévő rossz kérdésére, de általában e korai monográfiának a világrend és az autonómia viszonyával

[27] WU

kapcsolatos vizsgálódásai is bensőséges kapcsolatban állnak e „végső” megértéssel. [28] Az e két oldallal jellemzett filozófiai törekvés pedig a husserli fenomenológiai filozófia iránti több évtizedes elkötelezettséggel összefonódva e filozófiai irányzat kontextusában fogalmazódik meg konkrét filozófiai programként.

Természetesen egy ilyen nagyszabású program keretében a mennyiségi – extenzív – végtelen kérdése csak partikuláris kérdésként szerepelhet, mely elsősorban a filozófia és az olyan résztudományok mezsgyéjén jelenik meg, mint a téridőbeli világ mennyiségi aspektusait vizsgáló fizika, vagy a mennyiségi végtelen elvont fogalmaival dolgozó cantori matematika. S ha ezen utóbbi végtelenfogalma Tengelyinél mégis a fenomenológiai elemzés tárgyává válik, ennek két oka van: ***Egyrészt*** – mint már ezt említettük – szemben a mennyiségi végtelen addig általánosan elterjedt arisztotelészi fölfogásával, az aktuális végtelennek ***nem ontoteológiai*** (tehát nem Isten vagy az abszolútum végtelenségének értelmében vett) fogalma annak ellenére éppen Cantor matematikája nyomán jelent meg újra markánsan az európai gondolkodásban, hogy az utóbbi a teoplatonizmus és az ontoteológia elkötelezettje volt. ***Másrészt*** – nyilván a cantori végtelen előbb jelzett gondolkodástörténeti szerepétől is motiváltan – Tengelyit az érdekli, hogy a cantori matematikai végtelen miképpen viszonyulhat az általa kidolgozni szándékozott fenomenológiai metafizika végtelenfogalmához: mennyiben lehet annak mintája, illetve mennyiben reprezentálhatja azt a matematika mint speciális résztudomány területén.

Ennek megfelelően Tengelyi egyrészt méltatja a végtelen cantori matematikai elmélet gondolkodástörténeti jelentőségét, melyet abban lát, hogy az nem csupán a matematikán belül, hanem a filozófiában is hozzájárult az aktuális végtelenről szóló diszkusszió fölelevenedéséhez. Ugyanakkor fölteszi azt a kérdést, hogy vajon ezen túl a mennyiségi végtelen ezen új fogalma nyújthat még újat a filozófia számára?

Mint láttuk, az aktuális mennyiségi végtelen korábbi – az arisztotelészi tradíció nyomán többnyire elutasított – fogalma a véges mértékekhez hasonló konkrét, minden végest fölülről lezáró, de ezzel együtt amorf, meghatározatlan mértékre vagy mennyiségre utalt: tipikusan ilyen az atomok és a világok végtelensége a görög atomista kozmológiában, vagy a világok végtelen sokasága Giordano Bruno kozmológiájában. Mármost az aktuális végtelen újbóli tematizálásán túl Tengelyi éppen abban látja a cantori elmélet jelentőségét, hogy az

[28] Tengelyi korai monográfiája az „Autonómia és világrend” és a „Világ és végtelenség”, mint a világra irányuló kozmikus monográfiák, mintegy keretbe zárják életművét, jelezve annak alapvetően a világ és az emberi l ét végső értelmére irányuló, ebben az értelemben véve „kozmológiai” beállítódását.

aktuális mennyiségi végtelen e hagyományos, egyedi fogalmával szemben a mennyiségi végtelent strukturálja, és végtelen mennyiségek nyitott, le nem zárható sorozatát állítja elénk. Ennek kapcsán konkrétan az alef-0, alef-1, …….. alef-n, …….. transzfinit számosságok sorozatára gondol, és arra utal, hogy ezek fölé – éppen a maximális számosság fogalmának Cantor által fölfedezett, a jelen tanulmányban már említett ellenmondásossága miatt – nem helyezhető egy újabb, valamennyinél nagyobb számosság.

Tengelyi így a platonikus metafizika keretében adódó cantori képzeteket fogadja el matematikaiként, azaz nem különbözteti meg a tulajdonképpeni matematikát és annak platonista metafizikai értelmezését, hanem ténynek tekinti, hogy a transzfinit mennyiségek aktuális végtelen mennyiségi meghatározások. Az így fölfogott platonikus metafizikai értelemben vett cantori elméletben pedig azért a végtelen mennyiségek tekintett végtelen számosságok végtelenbe szaladó, le nem zárható nyitott sorozata kelti föl érdeklődését, mert Husserlre hivatkozva a világ végtelenségét egy fenomenológiai metafizikában *csak mint nyitottságot*, *mint lezárulatlanságot* – tehát *sem mint az abszolútum végtelenségét, sem mint létezők végtelen mennyiségi sokaságát* – tartja elképzelhetőnek. Így eddig a pontig úgy látszik, hogy az előzőek nyomán pozitív válasz adható a cantori végtelenfogalom és a fenomenológiai metafizika viszonyára irányuló kérdésre: mivel a cantori elmélet strukturált, a kisebb-nagyobb relációba állítható végtelen számosságokkal a végtelen fokozatainak nyitott sorozatát állítja elénk, úgy tűnik, hogy ez a végtelen mint mennyiségi-matematikai végtelen ***egyrészt*** mintául szolgálhat a fenomenológiai metafizika végtelenfogalma számára, mely a végtelenséget mint nyitottságot fogja föl, ***másrészt*** a matematika speciális területén, a mennyiségek világában egyúttal reprezentálja is azt.

Csakhogy e ponton radikális fordulat következik be Tengelyi elemzésében. Bármilyen messzire is jut e tekintetben Cantor – állapítja meg–, elmélete mégsem alkalmas arra, hogy segítségével illusztráljuk a világ végtelenségét. A világ fenomenológiai értelmében vett végtelensége ugyanis azon túl, hogy nem a világban jelenlévő dolgok végtelen mennyiségét jelenti, nem azonos e dolgok összességének lezáratlanságával sem. E nyitottság a tapasztalatnak, illetve a tapasztalatban adott dolgoknak nyitottságát jelenti: azt, hogy e dolgok nem rendelkeznek egyfajta előre adott, rögzített jelleggel, hanem mindig új tulajdonságokat vehetnek föl.[29] A világ végtelenségének adekvát fenomenológiai megragadásához ezért szerinte nem elegendő a rögzített elemekből fölépülő végtelen számosságsorozat nyitottságát

[29] WU: 543-546

és kimeríthetetlenségét figyelembe venni, mivel a végtelenség fenomenológiai fogalmához hozzátartozik az elemek folyamatosan változó-formálódó, a történelem, a kultúra és a szellemi élet kontextusában új és új minőségekkel és értelemmel fölruházódó, a maga teljességében mindig meghatározatlan és ebben az értelemben dinamikus volta.[30] Ez a Tengelyi által hangsúlyozott fenomenológiai nyitottság azt jelenti, hogy a világ elemei, „dolgai” nem lezártak, hanem itt és most, aktuálisan nyitottak, bármikor új aspektusban jelenhetnek meg, azaz végtelenségük, mint nyitottság itt és most fönnáll – tehát aktuális. Végül pedig e nyitottság a mindennapi élet apró dolgaiban ugyanúgy adva van, mint az olyan életélményekben, mint az a megrázkódtatás, ami Tolsztoj katonatisztjét érte a bál utáni reggelen, vagy amiként szintén Tolsztoj Iván Iljicse számára a betegágyban a világ és az élet egésze korábban számára elképzelhetetlenül új tartalmat és minőséget kapott.

Mivel Tengelyi Cantort platonista értelmezésben olvassa, a cantori számosságokkal jellemzett végtelen halmazok nem nyitott, hanem lezárt egységekként, a végtelen számosságok pedig végtelenségük ellenére ugyanígy a véges számosságokhoz hasonló, szintén lezárt, határozott mennyiségekként jelennek meg számára, azaz annak a fogalmi csúsztatásnak áldozatává válik, amely a végtelen számosságú halmazok számosságát az almáskosár 25 almájának számosságához hasonlóan lezártnak, a véges számosságokhoz hasonló jellegűnek tartja. S bár a transfinti rendszámok és a végtelen számosságok alef-1, alef-2 ……. alef-n… sorozata ezen platonista olvasatban is nyitott sorozat, a sorozat elemei ebben az immár nem matematikai, hanem metafizikai kontextusban mégiscsak zárt egységekként adódnak, ami éppen ellentétes a husserli végtelenségfogalommal, hiszen az – mint láttuk –a világ végtelenségét elsődlegesen elemeinek nyitottságaként értelmezi. Ennek megfelelően Tengelyi nemcsak elutasítja azt, hogy a fenomenológiai metafizika a cantori matematikához kapcsolódva, azt filozófiailag továbbgondolva alkossa meg a világ végtelenségének fenomenológiai fogalmát, hanem Cantort e szempontból negatív ellenpéldának tekinti, amellyel a filozófiai végtelenfogalmat mintegy szembesíteni kell.

[30] WU: 545-546

10. A „nyitottság" mint aktuális „vég"-telenség husserli-tengelyi-féle fogalmáról

Bár a végtelenség előbbi, fenomenológiai fogalma, mint a tapasztalati, vagy az életvilágban élményszerűen megélt létezők lezáratlan nyitottsága, „képességük" arra, hogy mindig új és új aspektusban jelenjenek meg, egyértelmű fogalomnak tűnik, a végtelen hagyományos, arisztoteliánus és/vagy platonista tendenciájú képezte miatt mégis némi megvilágítást igényel. Kísért ugyanis az a veszély, hogy e végtelent a létezők által a jelenben nem hordozott, de bármely pillanatban általuk fölvehető új értelmeknek, dimenzióknak, aspektusoknak, illetve kimeríthetetlen lehetőségeknek végtelen sokaságaként értelmezzük. Ez azonban arisztoteliánus olvasat, amennyiben benne végtelen sok, még nem reális lehetőségről van szó. Egy ilyen olvasat pedig könnyen platonizmusba fordulhat, ha e lehetőségekre mint a jelen világban nem létező állapotokra, aspektusokra, tulajdonságokra tekintünk, hiszen e személet egy harmadik világot involvál, ahol mintegy már e lehetőségek ott „szunnyadnak". Csakhogy husserli értelemben a világ nem elemeinek, a dolgoknak a nyitottságból adódó lehetőségek halmazának mennységi végtelensége miatt „végtelen", hanem maga ez az itt és most adott nyitottság az, ami a világ „vég"-telensége. Nem a világon kívüli, még nem létező potenciákról van ebben az összefüggésben szó, hanem a világon belül itt és most létező dolgok nyitottságáról, mint aktuális tulajdonságukról.

De hogyan lehetséges ez a nyitottság aktualitásként, ha végeredményben mégiscsak a dolgok még nem létező vagy éppen még nem adott aspektusairól, lehetőségekről van szó? E kérdés már maga is elhibázott: még mindig ott kísért benne a végtelen mennyiségi fogalma, melynek nyomán a nyitottságot mint végtelenséget a nyitottságból adódó potenciák mennyiségének végtelenségébe értelmezi át. Csakhogy – mint már az előbb hangsúlyoztuk – ‚itt nem lehetőségek mennyiségről van szó, hanem magukról az egyedi dolgok tulajdonságáról. Nem a fölvehető aspektusok és értelmek végtelen mennyisége adja e nyitottságot, hanem az maguknak a dolgoknak itt és most adott ontológiai természete. A végtelenség mint nyitottság tehát sem a számok esetében (lásd Wittgenstein, akinél pl. az 1,2,3 ……. n véges sorozat az „n" értékétől függetlenül mindig nyitott, hiszen mindig továbbfolytatható), sem életvilágunk létezői tekintetében (lásd Husserl és Tengelyi) nem a számok vagy a dolgok megjelenési lehetőségeinek mennyisége vagy mennyiségi tulajdonsága, hanem a létezők „itt és most" jelenlévő, aktuális nyitottsága, „lezáratlansága". Bár Tolsztoj hőse számára a bál eufórikus hangulatában a világ lezártnak tűnhetett, végtelensége mint nyitottság már ott és akkor is aktuálisan adva volt, hiszen enélkül nem válthatta volna ki a másnapi katonai fenyítés látványa azt a megrázó hatást, mely alapjaiban formálta át számára a világot. ***E fenomenológiai végtelenség mint nyitottság a tapasztalati létezők itt és most jelenlévő, reális, „aktuális" minőségi tulajdonsága, melyhez nem szabad mennyiségi képzeteket (még az arisztotelészi potenciális mennyiségi végtelen képzetét sem) társítani.***

11. Tengelyi elemzése a wittgensteini kontextusban

Ezen alfejezet elején elsőként arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy miképpen jelenhet meg ebben az összefüggésben Wittgenstein, aki a metafizika megrögzött ellensége, és aki egy olyan filozófiai tradíció megalapítója, mely gyökeresen idegen a husserli filozófiától? A válasz erre az, hogy amennyiben Wittgenstein Cantor-elemzése csupán az ő metafizika-ellenességének projekciója volna, mely csak az ő sajátos filozófiájának keretében bír értelemmel, akkor a jelen összefüggésben valóban nem volna helye megemlítésének. Csakhogy láthattuk, hogy az osztrák filozófus – bár antiplatonista, antimetafizikai beállításától motiválva, de e filozófiai állásponttól független – tényszerű összefüggésekre mutat rá: ***elemzése filozófiailag semleges, tényszerűen igaz belátásokra vezet***.

Mármost láttuk, hogy Tengelyi Cantor matematikai elméletét a mennyiségi végtelenekről annak platonikus értelmezésében elemzi, és így nem teszi meg azt a finom filozófiai-módszertani megkülönböztetést a tulajdonképpeni matematika és annak filozófiai értelmezése között, amelyet Wittgensteinnél megtalálhatunk. Ennek jegyében nem reflektál a cantori elmélet kapcsán fölvetődő azon filozófiai problémákra sem, melyeket legjellegzetesebb módon szintén Wittgenstein fogalmazott meg, de amelyeket már Cantor matematikus kortársai, majd később az intuicionista és konstruktivista matematikusok is fölvetettek. Persze ez nem róható föl Tengelyi hibájaként, hiszen Cantor elmélete standard módon így szerepel nem csupán a matematikusok, hanem a matematikafilozófusok többségénél is. Ez sem változtat azonban azon, hogy Cantor-elemzésének megvannak a maga filozófiai korlátjai. A platonikus olvasat tekintetében ugyan adekvát elemzést ad, és az így értelmezett cantori végtelenek valóban matematikai ellenmintái az ő általa kidolgozni szándékozott metafizikai-fenomenológiai végtelennek. Ám e platonikusan értelmezett elméletet – amely tehát már filozófiai interpretáció, s így végeredményben filozófia és ezen belül metafizika – tiszta matematikának tekinti. Nem válik világossá számára, hogy valójában nem a matematikával, mint résztudománnyal, hanem egy filozófiával: a platonista metafizika egy speciális formájával szembesül. Ennek megfelelően, amíg Tengelyi elemzése érvényes a platonikus filozófiai értelmezésben vett cantori elméletre, addig nem vonatkoztatható a cantori matematikára mint platonista módon még nem interpretált tiszta matematikára: ezen utóbbinak Wittgenstein nyújtja helyes fogalmi értelmezését.

12. A szimbolizálás cusanusi fogalmának fölelevenítése Tengelyi elemzésében és ennek filozófiai jelentősége. A szimbolizálás mint kulcs a matematikai végtelen valódi paradoxonának föloldásához

A cantori végtelenfogalomról adott elemzésének egy eddig nem tárgyalt mozzanataként Tengelyi föleleveníti a „***szimbolizálás***" cusanusi fogalmát, mellyel a német gondolkodó a mennyiségi-matematikai végtelen és Isten végtelensége között teremtett kapcsolatot.

Cusanus szerint Isten – az Abszolútum – a mérték, a nagyság dimenziójában a „megragadhatatlan legnagyobb"[31] („maximum incomprehensibile"**)**, akit ezért már csupán nagysága tekintetében sem képes az emberi értelem megragadni. Ennek ellenére mégsem mond le arról, hogy a matematika segítségével bizonyos képzeteket alakítsunk ki róla: amellett érvel, hogy a matematika eszközeivel, illetve az aktuális mennyiségi végtelen matematikai megjelenítéseivel szimbolizálható e „megragadhatatlan legnagyobb". **[32]**: Jól ismert példája a végtelen körív. A körnek mint véges objektumnak semmi köze sincs a minden méretet és mértéket meghaladó, és ezért mérhetetlen ó maximumhoz, és ez igaz akkor is, ha e kört végtelen nagyra nagyítjuk föl képzeletünkben. Ám ha a végesben a körív és az egyenes egymást kizáró ellentétek, ezek az egymást kizáró ellentétek a végtelenben azonossá válnak, hiszen a végtelen nagy kör íve maga is egyenes lesz. Isten, a végső maximum végtelensége természetesen nem ilyen, az továbbra is fölfoghatatlan marad, számunkra. Ám a végtelen kör ***szimbolizálja*** e végtelenséget, amennyiben a körív és az egyenes azonossá válásával szimbolikusan megmutatja – „szimbolizálja" – számunkra, ahogy Istenben végső egységbe egyesülhetnek a véges világ kibékíthetetlen ellentmondásai. S a szimbolizálás e fogalma nem csupán e példában jelenik meg Cusanusnál: az a gondolat, hogy a

[31] Cusanus: *A tudós tudatlanság*, Első Könyv /XVII. utolsó bekezdése (Cusanus 1999: 44.)

[32] WU: 440-441.

megragadhatatlan, a fölfoghatatlan, a mindenek fölött álló maximum a mennyiségi-matematikai végtelen segítségével szimbolizálható, Cusanus fő művében, a *Tudós tudatlanság*-ban számos ponton megjelenik, s egészében áthatja azt.

Cusanus és *Cantor* bármennyire is más úton járnak, és bármennyire is különböznek Cantor végtelenjei Cusanus végtelenjeitől, mégiscsak párhuzam van közöttük abban, hogy mindkettő megkülönbözteti egymástól a matematikai és az isteni végtelent, s ezt a párhuzamot azután Cantor még teljesebbé teszi, amikor ő is kijelenti, hogy a matematikai-mennyiségi végtelen egy esetben – a végtelen számosságokból képzett sorozat esetében – megragadhatatlansága ellenére szimbolizálhatja az abszolút végtelent. Maga Tengelyi ebben az összefüggésben idézi föl, és elemzi Cusanus elméletét, és mutat rá a cusanusi és a cantori koncepció teológiai párhuzamára. ***S éppen a cusanusi szimbolizálás ezen föllelevenítése az, amely megadja a kulcsot mind a cantori végtelennel kapcsolatos Tengelyi-féle elemzés továbbgondolásához, így egyrészt ahhoz, hogy kapcsolatba hozzuk a wittgensteini koncepcióval, másrészt ahhoz, hogy új, az ontoteológia nélküli metafizikán túlmutató mozzanatokat vonjunk be a fenomenológiai metafizika kérdésének tárgyalásába.***

Wittgenstein nyomán láttuk, hogy a cantori végtelenek önmagukban – tehát a matematikán kívüli, platonista értelmezés hozzáadása nélkül – valójában a vég nélküliség megfelelői, melyek mint ilyenek, véges szimbólumok és műveletek, illetve véges szabályok és véges konstrukciók tulajdonságai, és azok csak a platonista – azaz már egy adott filozófiai-metafizikai – értelmezésben jelennek meg reális végtelenekként. Ebből következőleg a transzfinit végtelenek le nem zárt sorozata is csak platonista értelmezésében szimbolizálhatja a teológiai végtelent, illetve az abszolútum végtelenségét. Ennek fényében pedig világossá válhat az is, hogy Tengelyi számára miért nem szolgálhatott mintául a cantori végtelenfogalom: mint láttuk nem annak puszta matematikáját teszi meg elemzése tárgyául, hanem platonista értelmezését, melynek következtében a végtelen számosságú halmazok az almáskosárban található almák halmazához hasonló, lezárt, határorzott számosságú halmazokként jelennek meg számára. Csakhogy e platonista értelmezés a tapasztalati világon túli, harmadik világbeli végtelenjeivel az ontoteológia felé mutat, miközben Tengelyi célja éppen az ontoteológia nélküli metafizika.. Tehát valójában nem maga a matematika bizonyul alkalmatlannak Tengelyi számára, hanem annak egy olyan filozófiai értelmezése, amely éppen ellentétes a fenomenológiai metafizika általa megfogalmazott programjával.

Ezután természetesen fölvetődik az a kérdés, hogy ha a platonikus értelmezés nélkül tekintünk a cantori matematikára, vajon megváltozik-e ez a most leírt helyzet?

Wittgenstein szerint a cantori matematikában tényszerűen egyrészt véges eljárási szabályok, másrészt véges konstrukciók (sorozatok, halmazok) vég nélküli folytathatóságáról, illetve vég nélküli bővíthetőségéről, „nyitottság”-áról van szó. E nyitottság tehát ugyanúgy véges tényezők (véges elemű számsorozatok, halmazok, már véges lépésben végrehajtott, de újra és újra továbbfolytatható műveletek) itt és most adott aktuális tulajdonsága, mint amiképpen ilyen Tengelyi számára is a világon belüli létezők végtelensége mint nyitottság. Könnyen belátható ezért, hogy a Tengelyi-féle fenomenológiai végtelenfogalomnak – azaz a létezőknek tulajdonított nyitottságnak – a matematika tartományán belül éppen a wittgensteini értelemben vett végtelen, azaz a mennyiségi végtelennel szembeállított „vég”-telen, mint véges matematikai szimbólumok, szabályok és a belőlük képzett szintén véges konstrukciók minőségi (és nem mennyiségi) tulajdonsága felel meg. A szimbolizálás cusanusi és Tengelyi-féle fogalmával: ha a cantori elmélet végtelen számosságainak mint mennyiségi jellegű meghatározottságoknak fölülről nem limitálható sorozata a platonista filozófiai értelmezésben az abszolútum vagy Isten végtelenségét szimbolizálja, akkor a matematikai végtelen wittgensteini fogalma, illetve a wittgensteini értelemben vett cantori traszfinitek, mint nem mennyiségi meghatározások, hanem mint végesek tulajdonságai (tehát mint a lezáratlanságnak, a továbbfolytathatóságnak, a „vég nélküliség”-nek különböző tulajdonságtípusai), hasonló módon éppen Tengelyi László fenomenológiai végtelenét szimbolizálják. S ha arra gondolunk, hogy Wittgenstein végtelenségfogalma anti-platonista filozófiai beállítódásából fakad, akkor egy további összefüggés világlik föl számunkra Wittgenstein és Tengelyi között: mint már utaltunk erre, a matematika Wittgenstein által elvetett platonista értelmezése egyfajta ontoteológiai metafizika, vagy legalábbis ilyen irányba mutat, és Tengelyi éppen egy ontoteológia – így abszolútum – nélküli metafizika keretében törekszik a világ végtelenségét megragadó végtelenségfogalom kidolgozására. Ezért nem véletlen, hogy mély párhuzam tárulkozik föl a matematikai végtelen wittgensteini és a világ végtelenségének Tengelyi-féle fogalma között – és ezen az sem változtat, hogy a radikálisan metafizikaellenes Wittgenstein minden bizonnyal a Tengelyi által igenelt fenomenológiai metafizikát is elutasította volna.

A matematikai végtelen általunk valódinak nevezett paradoxona kapcsán már utaltunk arra, hogy a végtelen sok és a végtelen nagy képzete az emberi kultúrában nemcsak fogalmilag van jelen, hanem bizonytalan, homályos, megragadhatatlan, de mégiscsak létező sejtés formájában is. S a matematikai mennyiségileg végtelenek tartott, de tényszerűen csak „nyitott”, „vég nélküli” fogalmaival, konstrukcióval szembesülve a mennyiségi végtelen ezen intuitív képzete akkor is fölsejlik bennünk, ha egyébként eszünk által beláttuk, hogy itt csak mennyiségileg véges tényezők nyitottságáról van szó. E nyitott végesekkel szembesülve valahol mélyen mégiscsak úgy érezzük, hogy itt a nyitottságon mint tulajdonságon túl valami olyannal is dolgunk van, mint a mennyiségi végtelen. Ha az 1, 2, 3 ….. n …. sorozatra tekintünk, s ennek során az n utáni pontokban Wittgenstein szellemében tudatosan csak a továbbfolytathatóság jeleit látjuk is, mégis ellenállhatatlanul fölébred az érzés, hogy e pontoknak közük van a mennyiségi végtelenhez is: mintegy ott érezzük helyükben az „n”-t követő végtelen sok természetes számot. Hiába fogadjuk el tehát eszünkkel tényszerű igazságként, hogy itt csupán „vég nélküliség”-ről, vég nélküli továbbfolytathatóságról van szó, hiába tudjuk, hogy azokat a számokat, melyeket ismerünk, az emberiség konstruálja, s ezen már megkonstruált emberi számok mennyisége szükségképpen véges, mégis úgy érezzük, mintha valóságosan végtelen sok természetes szám létezne: mintha egyszerre létezne az összes, amit már megkonstruáltunk és az összes, amit elvben megkonstruálhatunk. S ez különösen így van, ha a cantori matematikával foglalkozunk.

Láttuk, hogy ugyanakkor Wittgenstein szerint ez az érzés, ez az intuitív képzet a nyelv általi elvarázsoltság következménye, illetve tünete, és ő a filozófia föladatát éppen abban látja, hogy megszabadítson bennünket e varázslattól. Ám szembesülve ezzel a végtelenre utaló most leírt érzéssel, a mennyiségi végtelen racionális megragadhatatlanságának, sejtésszerű homályosságának ellenére is határozott, eleven élményével, nehéz ezt a koncepciót elfogadni. Legalább ugyanilyen racionálisnak tűnik a wittgensteini állítás ellentéte, azaz az az álláspont, mely szerint a végtelen érzete, intuitív képzete jellegében a nyelvhez képest elsődleges, eredendő élmény (még akkor is, ha elfogadjuk, hogy csak a nyelv segítségével tudunk gondolkodni róla, illetve hivatkozni rá), és nem hibás nyelvhasználat hatására alakul ki, hanem éppen megfordítva: ez az élmény motiválja, ösztönzi mind a helytelen nyelvhasználatot, mind a matematikai végtelennek a nyitottságon, a „vég nélküliség”-en túllépő platonista filozófiai értelmezését.

Persze e megfordított értelmezés alapja az egyéni intuíció, hiszen a bennünk fölsejlő végtelen élménye olyan jelenség, olyan fenomén, amely kiküszöbölhetetlenül a személy saját egyedi, másnak át nem adható, mások számára csak nyelvileg jelezhető adottság. S mások beszámolóitól eltekintve csak e saját élmény alapján lehetséges mérlegelni a nyelv és a végtelen intuíciója közötti viszony wittgensteini koncepciójával ellentétes filozófiai állítást.

De ez nem e tárgykör egyedi sajátossága: a filozófia legalapvetőbb kérdéseinek nagyobbik része ilyen. Megértésükhöz a tiszta észen, az értelemen, a logikai-fogalmi gondolkodáson, valamint másik személyek beszámolóin túl a befogadó egyéni élményeire is szükség van: éppen úgy, mint amiképpen ezt Wittgenstein hangsúlyozza logikai-filozófia értekezéseihez írott előszavában, vagy amiképpen Kant is végeredményben ilyen élményekre hivatkozva tekinti a teret és az időt a szemlélet a priori kategóriáinak, s akinek antinómiái végső során szintén ilyen élményekre hivatkoznak. De utalhatunk ezen összefüggésben Heidegger filozófiájára is, akinek a gonddal és a szorongással kapcsolatos filozófiai fejtegetéseit nem értheti az, akinek nem voltak ilyen egzisztenciális élményei, vagy aki például a *Bevezetés a metafizikába* című művéhez írt előszavában igen kifejezően fejtegeti, hogy életünk élményeként, akár kimondatlanul is, miképpen sejlik föl bennünk olykor – többnyire kivételes pillanatokban, hangulatokban – a filozófia alapkérdése. Mindenesetre a jelen sorok szerzője teljességgel igazat ad Wittgensteinnek abban, és őt követve határozottan állítja, hogy a matematikában nincs jelen – még a cantoriban sem – tényszerűen a mennyiségi végtelen, és vitathatatlannak tartja, hogy az, amit a cantori matematika végtelenek nevez, tényszerűen csak „vég nélküli", vég nélküli továbbfolytathatóság. Ám az előbbiekben jelzett személyes élménytípushoz tartozó saját élménye alapján mégis tanúsíthatja, hogy mindennek belátása és elfogadása ellenére az ilyen matematikai konstrukciókkal foglakozva kikerülhetetlenül megjelenik számára a mennyiségi végtelennek nem az értelemben, nem a fogalmi gondolkodásban, hanem az intuícióban adódó képzete.

De hogyan lehetséges ez? – tehetjük föl immáron ezen előkészületek után újra a matematikai végtelen valódi paradoxonját illető kérdést. Miképpen adhatja a nyitottság, a lezáratlanság, a „vég nélküliség" e nehezen megragadható mennyiségi képzetet? Az 1,2,3 …… n … jelsorozatnak az „n"-t követő pontjai miért generálják a folytathatóságon túl egy mennyiségében is végtelen sorozat homályos képzetét, mely a maga teljességében még csak képzeletünkben sem ragadható meg? Cantor úgy vélte matematikailag megragadta a mennyiségi végtelenek alacsonyabb rendű típusát a transzfinit rendszámokkal és számosságokkal, de Wittgenstein nyomán tudjuk, ez tévedés volt: tényszerűen itt csak lezárulatlanságról, vég nélküli továbbfolytathatóságról, határtalanságról van szó. Matematikája tényszerűen csak a lezáratlanságot, a vég nélküliséget ragadta meg és tárgyalja, E matematika csak a platonista-metafizikai értelmezésben válik a mennyiségi végtelen leírásává, ami azonban már nem matematikai, hanem a matematika szempontjából önkényes hozzátétel. De miért kíséri ezt az elméletet még akkor is az intuitív mennyiségi végtelen homályos-sejtésszerű, fogalmilag soha meg nem ragadható képzete, ha nem fellebbezünk a platonizmushoz?

E kérdés megválaszoláshoz ***a kulcsot a szimbolizálás cusanusi-Tengelyi László-féle fogalma nyújtja***. Láttuk ***egyrészt***, hogy e szimbolizálás alkalmazható a platonista értelemben vett, mennyiségi matematikai végtelen és az abszolút végtelen relációjára. Így Cusanus végtelen sugarú köre, vagy a mennyiségi végtelenként értelmezett cantori transzfinit számosságok egy mindegyiknél nagyobb számossággal le nem zárható sorozata szimbolizálhatja az abszolútum végtelenségét, és ezáltal közvetve magát az abszolútumot. ***Másrészt*** láttuk azt is, hogy amennyiben a cantori elmélet konstrukcióit és eljárási szabályait Wittgensteint követve helyesen nem mennyiségileg végtelen, hanem csupán vég nélkül alkalmazható, vég nélkül továbbfolytatható, „nyitott" konstrukcióknak és eljárási szabályoknak tekintjük, akkor azok pontosan a végtelenséget a dolgok nyitottságként értelmező Husserl- és Tengelyi-féle végtelenfogalom matematika megfelelőiként – mintegy azok matematikai szimbólumaiként –jelenek meg. Mármost ugyanezen konstrukciók és eljárási szabályok a szimbolizálás ***egy harmadik*** típusaként már önmagukban, a platóni értelmezés nélkül is, pusztán tényszerű vég nélküli továbbfolytathatóságuk révén, mint annak jelei, „szimbólumai", fölidézhetik bennünk és „szimbolizálhatják" a mennyiségi végtelen intuitív, fogalmilag meg nem ragadó élményszerű képzetét.

Cantor tehát tévedett annyiban, hogy úgy vélte: matematikailag megragadta a mennyiségi végtelen, mert matematikájában tényszerűen csak a nyitottságról van jelen. Matematikája egyáltalában nem demonstrálja a mennyiségi végtelen aktuális, valós voltát: csak annak platonista értelmezésében jelenik az meg ilyenként, ám e platonista értelmezés már nem matematika, hanem a matematika által nem bizonyítható, ahhoz képest külső és önkényes metafizikai hozzátétel. De tévedése csak részleges: ha elmélete nem is ragadja meg a mennyiségi végtelent, ez az elmélet ennek ellenére – vég nélkül alkalmazható eljárási szabályai és nyitott, vég nélküli konstrukciói, transzfinit fogalmai révén – már a platonista értelmezés nélkül, önmagában is szimbolizálja a mennyiségi végtelen intuíciónkban megjelenő képzetét.

Így többszörös szimbolizálással szembesülünk itt:

i) Platonista értelmezésben a transzfinit számosságok végtelen sorozata, vagy Cusanusnak a fantáziában megjelenő, de a modern matematika platonista értelmezésében fogalmilag is megjelenő végtelen köre az abszolútum végtelen nagyságát, és ezáltal közvetve magát az abszolútumot szimbolizálja.

ii) A cantori végtelenek önmagukban, a platonista értelmezés nélkül a Husserl- és Tengelyi-féle végtelenségnek mint nyitottságnak matematikai megfelelői és egyben szimbólumai.
.

iii) Ugyanezen cantori szabályok és konstrukciók a maguk tényszerűségében, mint mennyiségileg véges, de tulajdonságukban vég nélkül nyitott teoretikus létezők (azaz már wittgensteini értelmezésükben is), egyúttal a mennyiségi végtelen bennünk fölsejlő intuitív, fogalmilag nem artikulálható képzetét is szimbolizálják.

A cantori konstrukciók tehát, ha tényszerűen nem is ragadják meg a mennyiségi végtelent, bensőséges kapcsolatban vannak vele: Egyrészt platonista értelmezésben úgy jelennek meg, mint amelyek a matematikán kívüli harmadik világban vagy Isten elméjében örökkévalóan létezőnek föltételezett mennyiségi végtelenek leírásai, és mint ilyenek, szimbolizálják az abszolútum végtelen nagyságát., Másrészt e platonista értelmezés nélkül is szimbolizálják a mennyiségi végtelen homályos, sejtésszerű, de mégis eleven erővel föltolúló intuitív emberi képzetét, s ezáltal közvetve, ezen intuitív képzeten keresztül szintén az abszolútum felé mutatnak.

13. Az „ontoteológia nélküli" és a klasszikus metafizika viszonya

Tengelyi metafizikai programja határozottan elkötelezi magát az ontoteológia nélküli metafizika mellett, és ennek megfelelően a metafizikán belül a végtelenséget csupán mint a világ nyitottságát tartja elfogadhatónak:

„A világ végtelensége nem az abszolút végtelen. Sokkal inkább nyitott végtelenség…"[33]

„A dolgon és a világon túli végtelenséggel a .... fenomenológiának mint olyannak nincs tennivalója. Egyedül és kizárólagosan az fontos a számára, hogy ennek a világnak a végtelenségét ragadja meg."[34]

[33] WU 556. o.

Ezen idézetekből ugyanakkor egyértelműen kiderül az is, hogy koncepciója nem irányul a vallásos képzetek és az abszolút végtelennel kapcsolatos teológiai vizsgálódások ellen. Az abszolútumot, illetve az abszolút végtelent – és általában a hagyományos metafizikát – viszont az általa vázolt metafizikai program a filozófiából határozottan ki kívánja zárni. S ez szintén egy Wittgensteinnel párhuzamos mozzanat: gyakorlatilag itt is egy – persze a wittgensteininél jóval szolidabb és szerényebb – filozófiai „terápiáról" van szó. Ez pedig megint csak nem véletlen: amiképpen Wittgenstein a nyelv elemzésével, úgy Tengelyi a fenomenológia módszerével törekszik az áthagyományozódott metafizika képzeteinek kritikájára, illetve újragondolására.

Ugyanakkor Tengelyi könyvének végén egyértelművé teszi, hogy a végtelenséget nyitottságként fölfogó, „ontoteológia nélküli" metafizikának prioritást tulajdonít a vallással és a teológiával szemben, amikor is annak a sejtésének ad hangot, hogy *talán* minden vallásos jellegű hagyomány a világ végtelenségén mint nyitottságon alapul.[35]

Csakhogy e Tengelyi-féle sejtéssel szemben óhatatlanul fölvetődik a kérdés, hogy vajon honnan származik a világnak ez a mindennek alapjául szolgáló nyitottsága? Vajon a véges dolgokból összeálló világ nyitottságként adott végtelensége nem valamiféle ezen túli abszolút végtelenre utal? Egy olyan abszolút végtelenre, mely e nyitottság forrása? A matematika most tárgyalt szimbolizáló képességének fogalmával: miért szimbolizálhatja a platonista módon értelmezett mennyiségi matematikai végtelen az abszolútumot? S honnan ered a mennyiségi végtelen intuitív képzete, melyet a cantori matematika szabályai és konstrukciói már önmagukban, a platonista értelmezés nélkül, pusztán végeseknek tekintve őket is fölidéznek és szimbolizálnak? Hiszen a mennyiségi végtelennek ez az intuitív képzete más mint a nyitottság: bár a matematika véges, de nyitott létezői szimbolizálhatják, de a végtelenen mint nyitottságon messze túlmutatva a matematikától függetlenül is jelen van bennünk. Honnan ez a képzet? A nyitottság, mint elsődleges tényező generálja? Vagy éppen megfordítva: Tengelyi sejtésével szemben egy végtelen, végső abszolútum világon kívüli jelenléte nyitja föl számunkra a világot, s egyúttal a világon belüli dolgokat?

---

[34] WU 548. o.

[35] WU 556. o.

E kérdésben nem egyszerűen a kritizált és meghaladni kívánt hagyományos metafizika száraz, mesterkélt vagy megcsontosodott fogalomrendszere kísért, és ez példaként illusztrálható Pilinszky János Bach „János Passiójá"-nak hatása alatt tett nevezetes kijelentésével, mely szerint „Bach [zenéje] elsősorban istenbizonyíték",[36] mely állítást azután évekkel később Bach 54. („*Widerstehe doch der Sünde*") kantátájára utalva Kocsis Zoltán erősített meg.[37]

Egy magát fenomenológiainak tekintő metafizika figyelmen kívül hagyhatja-e az ilyen és hasonló evidenciákat? S egyáltalában figyelmen kívül hagyhatja-e annak a Pilinszky Jánosnak költészetét, aki, amikor arról ír, hogy

„A teremtés bármily széles,
ólnál is szűkösebb.
Innén odáig, Kő, fa, ház.
…………..…
és mégis, olykor belép valaki.
És ami van, hirtelenül kitárul",

a költészet eszközeivel éppen azt jeleníti meg szuggesztív módon, amit Husserl és Tengelyi fogalmilag a „nyitottság" kategóriájával próbál kifejezni, de aki költészetének kontextusában azt is nyilvánvalóvá teszi, hogy számára ez a „nyitottság" határozottan transzcendens eredetű?

[36] Pilinszky 1963.

[37] Kocsis Zoltán 2013.

Ezek olyan messzire vezető, a filozófia legbensőbb rétegeit érintő kérdések, amelyek semmiképpen sem fogalmazódhattak volna meg itt Tengelyi filozófiailag gondolatgazdag monográfiája nélkül, és amelyek természetesen még csak rövid reflexiók erejéig sem érinthetőek a jelen írás kereteiben. De e kérdésektől visszaléphetünk tulajdonképpeni tárgyunk, a matematika felé. Vajon az emberi kreativitás és a husserli végtelen mint nyitottság együttesen elégséges-e e cantori matematika jelenlétének és működésének megértéséhez? Akárhogy is nézzük, annak ellenére, hogy e matematika a mennyiségi végtelent tényszerűen nem ragadja meg, mégiscsak úgy tűnik, hogy a cantori elméleti építmény fogalmi bázisát mégsem csupán önmagában a világ nyitottsága alkotja, hanem hozzátartozik a mennyiségi végtelen intuitív képzete – sőt talán még a mennyiségi végtelenek ezen az intuíción alapuló platonikus fogalmi ideája is. S szintén úgy tűnik, hogy a matematikusi gyakorlatot sem annyira a wittgensteini „vég nélküliség", mint inkább ez az intuitív képzet vezeti. Ez pedig már magában is arra utal, mintha a cantori elmélet kimutatna e világból, amit azután megerősít a korábbiakban jelzett kettős szimbolizálás, mely a platonikusan értelmezett cantori matematika esetében az abszolútummal, e platonista értelmezés nélkül a mennyiségi végtelen intuitív képzettével hozza relációba e matematika fogalmait – ami persze Wittgenstein szellemében lehet pusztán nyelvhasználati hiba következményként föllépő illúzió is. De vajon a cantori elmélet sikeres alkalmazhatósága nem alapozza-e meg Wittgensteinnel – és egyúttal Tengelyivel is – szemben azt a sejtést, hogy ez a kifelé mutató értelmezés (Pilinszky János és Kocsis Zoltán Bach zenéjére vonatkozó kijelentéséhez hasonlóan) filozófiailag mégiscsak releváns, és ezért nem tehető maradéktalanul a wittgensteini terápia tárgyává? Vajon ez a nyitottság – egyfajta sehová nem mutató, s ezért üres nyitottsággal szemben – nem irányul-e valamerre? Egy olyan irányba, mely tekintetében – hogy stílusosan matematikai kifejezést használjunk – Bach zenéje, Pilinszky költészete, Kocsis Zoltán előadóművészete és a cantori matematika „konvergál”?

Olyan kérdések ezek, amelyekről Tengelyi László talán már jóval többet tud nálunk egy másik világban, ahol majd minden kérdésünk végérvényesen megválaszolást nyer, és ezért nem lesz többé szükségünk filozófiára.

Rövidítések feloldása: WU: Tengelyi László: *Welt und Unendlichkeit. Zum Problem phänomenologischer Metaphysik*. Freiburg, München: Verlag Karl Alber, 2014.

További irodalom:

Bell, John Lane 2006: „Cantor”. In uő: *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy.* Chapter 4. The Reduction of the Continuous to the Discrete in the 19th and the Early 20th Century. Milano: Polimetrica International Scientific Publisher. 154-168.

Burali-Forti, Cesare (1897): „Une questione sui numeri trasfinti.” *Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo 11.* 154-164.

Cantor, Georg (1883/1932): „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre” (Leipzig 1883) In: Cantor 1932: 165-208. (V. ö. még: http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN235181684_0021&DMDID=DMDLOG_0051)

Cantor, Georg (1885/1932): „Über die verschiedenen Stadtpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche”. In Cantor 1932: 370-377.

Cantor, Georg (1887-1888/1932): Mitteilungen zur Lehre der Tranfiniten.. In: Cantor 1932: 378-442.

Cantor, Georg (1899/1932): „Cantor an Dedekind, Halle 28. Juli 1899”. In: Cantor 1932: 443-447

Cantor, Georg (1899/1932b): „Cantor an Dedekind, vom 31 August 1899” In: Cantor 1932: 448.

Cantor, Georg (1932): *Gesammelte Abhandunglen. Matematischen und Philosophischen Inhalt.* Herausgeben von Ernst Zemerlo. Berlin: Julius Springer

Cantor, Georg (1988): „Végtelenség a matematikában és a filozófiában: válogatott szemelvények." (Fordította Szabó Zoltán, Válogatta, a fordítást ellenőrizte és a jegyzeteket készítette: Ruzsa Imre.) In: *Filozófiai Figyelő 1988/4* 56-87.

Cantor, G (1999): *Briefe* (Herausgegeben von Meschkowski, H – Nilson,W.) Berlin, etc.: Springer.

Clayton, Philiph (1996*) Das Gottesproblem, Band 1: Gott und Unendlichkeit in der neuzeitlichen Metaphysik*, Paderborn: Schöningh

Cusanus, Nikolaus (1999): *A tudós tudatlanság.* Budapest: Kairosz Kiadó.

Dauben, Joseph (1979): *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton: Princeton University Press.

Deiser, Oliver (2002): *Einführung in die Mengenlehre: Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo.* Berlin, Heidelberg, New York etc.: Springer.

Felgner, Urlich (2010): „Introductory to Zermelo: Über die grundlagen der Mengentheorie I". In Zermelo 2010: 160-187.

Fraenkel,Abraham Adolf – Bar-Hiller Yehoshua (eds) (1958): *Foundation of Set Theory.* [*Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, Volume 23.* (Eds: Brouwer, L. E. J. – Beth E. W. – Heyting A.)] Amsterdam: North-Holland Publishing Company, Elsevier. (http://www.sciencedirect.com/science/bookseries/0049237X/23)

Fraenkel, Abraham Adolf 1932: Das Leben Georg Cantors. In: Cantor 1932: 450-483.

Hallett, Michael (1984) *Cantorian Set theory and Limitation of Size*, Oxford University Press, Oxford.Kocsis Zoltán (2013): „Minden szöget ismertem." *Heti Válasz 2013/42.* (2013. október 17.) (http://valasz.hu/kultura/minden-szoget-ismertem-69394)

Mückenheim, Wolfgang: *Transfinity. A Source Book.* 27.dec. 2018. https://www.hs-augsburg.de/~mueckenh/Transfinity/Transfinity/pdf

Neidhart, Ludwig (2007): *Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie*, Göttingen: Cuvillier Verlag.

Pilinszky János (1963): „Bach – Istenbizonyíték". *Új ember,* 1963. április 21. (http://gondolkodom.hu/pilinszky-janos-bach-janos-passio/)

Purkert, Walter (1989): Cantor's Views on the Foundations of Mathematics. In: Row, David E. and McCleary, John (eds.): *History of Modern Mathematics, Volume I: Ideas and their Receptions.* Boston, San Diego, London etc: Academic Press Ltd 49-65.

Tapp, Christian (2005): *Kardinalität und Kardinäle: Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit* (Boethius, vol. 53), Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Tapp, Christian (2014): „Absolute Infinity – A Bridge Between Mathematics and Theology?" In: Tennant, Neil (ed): *Foundational Adventures: Essays in Honour of Harvey M. Friedman*. London: College Publications. (https://www.uibk.ac.at/philtheol/tapp/publ/tapp_a24_2014_absolute_friedman.pdf

Wittgenstein, Ludwig (1960): *Tractatus Logico-philosophicus. Tagebücher 1914-1916. Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig (1964): *Philosophische Bemerkungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp:.

Wittgenstein, Ludwig (1974): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, Ludwig (1984a): *Philosophische Grammatik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp:.

Wright, Crispin (1980): *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Cambrige (Massachusetts): Harvard University Press.

Zermelo, Ernst (2010): *Collected Works. Gesammelte Werke. Volume I. Band I. Set Theory, Miscellanea. Mengenlehre, Varia.* (Edited by, Herausgeben von Ebbinghaus, Heinz-Dieter - Kanamori, Akihiro). Heidelberg Dordrecht, London, New York: Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Springer.